NGUYỄN MINH HIẾU
0915-333-629

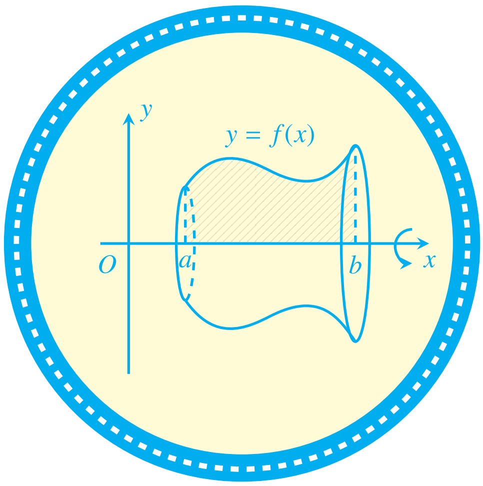
TRƯỜNG THPT PHAN ĐÌNH PHÙNG

PHÂN LOẠI CÂU HỎI

TRONG CÁC ĐỀ THI THPT QUỐC GIA

MÔN TOÁN

CỦA BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO



Đồng Hới, tháng 11-2020

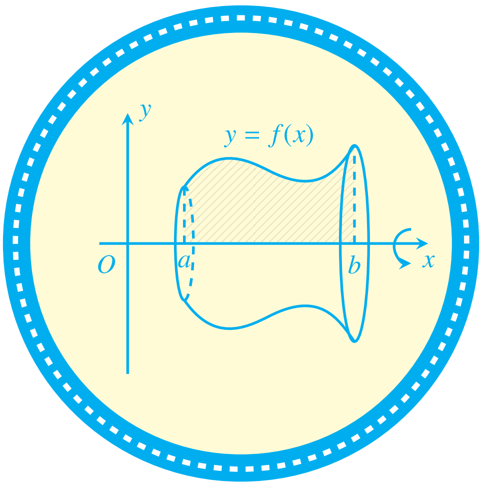
TRƯỜNG THPT PHAN ĐÌNH PHÙNG

PHÂN LOẠI CÂU HỎI

TRONG CÁC ĐỀ THI THPT QUỐC GIA

MÔN TOÁN

CỦA BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO



Đồng Hới, tháng 11-2020

Mục lục

Chuyên đề 1. Ứng Dụng Của Đạo Hàm Để Khảo Sát Và Vẽ Đồ Thị Của Hàm Số 7
§1. Tính Đơn Điệu Của Hàm Số 7
§2. Cực Trị Của Hàm Số 14
§3. Giá Trị Lớn Nhất Và Giá Trị Nhỏ Nhất Của Hàm Số 19
§4. Đường Tiệm Cận Của Đồ Thị Hàm Số 27
§5. Khảo Sát Sự Biến Thiên Và Vẽ Đồ Thị Của Hàm Số 30
Chuyên đề 2. Khối Đa Diện 51
§1. Khối Đa Diện Và Thể Tích Của Khối Đa Diện 51
§2. Thể Tích Khối Chóp 52
§3. Thể Tích Khối Lăng Trụ 55
§4. Tỉ Số Thể Tích 58
Chuyên đề 3. Hàm Số Lũy Thừa, Hàm Số Mũ Và Hàm Số Lôgarit 65
§1. Lũy Thừa 65
§2. Lôgarit 65
§3. Hàm Số Lũy Thừa, Hàm Số Mũ Và Hàm Số Lôgarit 70
§4. Phương Trình, Bất Phương Trình Mũ 73
§5. Phương Trình, Bất Phương Trình Lôgarit 77
§6. Bài Toán Thực Tế 87
Chuyên đề 4. Mặt Nón, Mặt Trụ, Mặt Cầu 91
§1. Mặt Nón 91
§2. Mặt Trụ 94
§3. Mặt Cầu 98
Chuyên đề 5. Nguyên Hàm, Tích Phân Và Ứng Dụng 103
§1. Nguyên Hàm 103
§2. Tích Phân 108
§3. Ứng Dụng Của Tích Phân 118
Chuyên đề 6. Phương Pháp Tọa Độ Trong Không Gian 127
§1. Tọa Độ Trong Không Gian 127
§2. Phương Trình Mặt Phẳng 130
§3. Phương Trình Đường Thẳng Trong Không Gian 134
§4. Bài Toán Tổng Hợp 140
Chuyên đề 7. Số Phức 149
§1. Số Phức, Phép Toán Số Phức 149
§2. Biểu Diễn Hình Học Của Số Phức 154
§3. Phương Trình Bậc Hai Nghiệm Phức 157
§4. Cực Trị Số Phức 159

Chuyên đề 8. Tổ Hợp, Xác Suất **161**
§1. Tổ Hợp 161
§2. Xác Suất 162
Chuyên đề 9. Dãy Số, Giới Hạn, Đạo Hàm **167**
§1. Dãy Số, Cấp Số 167
§2. Giới Hạn, Đạo Hàm 168
Chuyên đề 10. Góc Và Khoảng Cách **171**
§1. Góc 171
§2. Khoảng Cách 175

Chuyên đề 1

Ứng Dụng Của Đạo Hàm Để Khảo Sát Và Vẽ Đồ Thị Của Hàm Số

§1. Tính Đơn Điệu Của Hàm Số

1. Tính đơn điệu của hàm số cho bởi công thức

1.1 (Đề minh họa 2016). Hỏi hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty; 0)$. **B**. $(0; +\infty)$. **C**. $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right)$. **D**. $\left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải.
Ta có $y' = 8x^3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.
Chọn phương án **B.** □

1.2 (Đề chính thức 2017). Cho hàm số $y = x^3 + 3x + 2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải.
Ta có $y' = 3x^2 + 3 > 0, \forall x \in (-\infty; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.
Chọn phương án **D.** □

1.3 (Đề tham khảo 2017). Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$. **B**. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. **D**. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Lời giải.
Ta có $y' = \dfrac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
Chọn phương án **A.** □

1.4 (Đề thử nghiệm 2017). Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{3}; 1\right)$. **B**. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$. **D**. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 4x + 1$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{array}\right.$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$			
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{31}{27}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

Chọn phương án **A.** □

1.5 (Đề chính thức 2017). Hàm số $y = \dfrac{2}{x^2 + 1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; +\infty)$. **B**. $(-\infty; 0)$. **C**. $(-1; 1)$. **D**. $(0; +\infty)$.

Lời giải.

C1: Ta có $y' = -\dfrac{4x}{\left(x^2 + 1\right)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

C2: Sử dụng máy tính, chọn MODE 7. Nhập vào hàm $\dfrac{2}{x^2 + 1}$. Chọn Start -2, End 2, Step 0,5.
Dò trên cột $f(x)$ ta thấy hàm số đồng biến trên $(-2; 0)$ và nghịch biến trên $(0; 2)$.
Từ đó suy ra hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Chọn phương án **D.** □

1.6 (Đề tham khảo 2017). Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. $y = 2x^3 - 5x + 1$. **B**. $y = \dfrac{x - 2}{x + 1}$. **C**. $y = 3x^3 + 3x - 2$. **D**. $y = x^4 + 3x^2$.

Lời giải.

Loại phương án $y = \dfrac{x - 2}{x + 1}$ vì hàm số $y = \dfrac{x - 2}{x + 1}$ không xác định tại $x = -1$.
Loại phương án $y = x^4 + 3x^2$ vì hàm số trùng phương không thể đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
Chọn phương án $y = 3x^3 + 3x - 2$ vì ta có $y' = 9x^2 + 3 > 0, \forall x \in (-\infty; +\infty)$.
Chọn phương án **C.** □

2. Tính đơn điệu của hàm số cho bởi bảng biến thiên hoặc đồ thị

1.7 (Đề tham khảo 2020). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

A. $(-1; 1)$. **B**. $(-1; 0)$.
C. $(0; 1)$. **D**. $(1; +\infty)$.

Lời giải.
Từ hình vẽ, suy ra hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.
Chọn phương án **C.** □

1.8 (Đề chính thức 2019). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	3	↘	1	↗	$+\infty$

A. $(0; +\infty)$. **B.** $(2; +\infty)$.
C. $(0; 2)$. **D.** $(-2; 0)$.

Lời giải.
Từ bảng biến thiên, dễ thấy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.
Chọn phương án **C.** □

1.9 (Đề tham khảo 2018). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

A. $(-\infty; -2)$. **B.** $(-2; 0)$.
C. $(0; +\infty)$. **D.** $(0; 2)$.

Lời giải.
Từ bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên hai khoảng $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$.
Chọn phương án **B.** □

1.10 (Đề chính thức 2020). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	4	↘	-1	↗	$+\infty$

A. $(-1; 0)$. **B.** $(-1; 1)$.
C. $(0; 1)$. **D.** $(-\infty; -1)$.

Lời giải.
Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.
Chọn phương án **A.** □

1.11 (Đề chính thức 2018). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

A. $(-1; 0)$. **B.** $(-\infty; 0)$.
C. $(0; 1)$. **D.** $(1; +\infty)$.

Lời giải.
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.
Chọn phương án **C.** □

1.12 (Đề tham khảo 2020). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

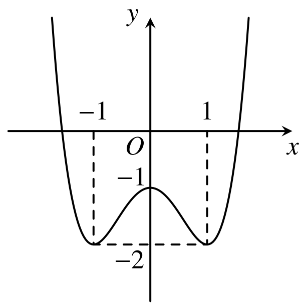
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-1	↗	2	↘	$-\infty$

A. $(-\infty; 0)$. **B.** $(0; 1)$.
C. $(-1; 0)$. **D.** $(-\infty; -1)$.

Lời giải.
Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số nghịch biến trên các khoảng $(1-; 0)$ và $(1; +\infty)$.
Chọn phương án **C.** □

1.13 (Đề tham khảo 2019). Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

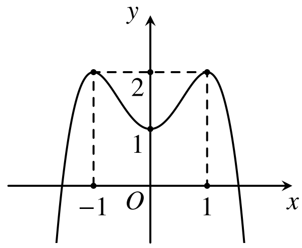
A. $(-1; 1)$. **B.** $(-1; 0)$. **C.** $(-\infty; -1)$. **D.** $(0; 1)$.



Lời giải.
Từ hình vẽ, dễ thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.
Chọn phương án **B.** □

1.14 (Đề chính thức 2020). Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1; 0)$. **B.** $(0; 1)$. **C.** $(-\infty; 0)$. **D.** $(1; +\infty)$.

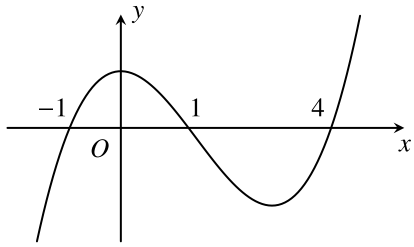


Lời giải.
Từ hình vẽ, suy ra hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.
Chọn phương án **B.** □

3. Tính đơn điệu của hàm số hợp

1.15 (Đề tham khảo 2018). Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(2 - x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(-2; 1)$. **B.** $(1; 3)$. **C.** $(2; +\infty)$. **D.** $(-\infty; -2)$.



Lời giải.
Xét hàm số $y = f(2 - x)$ ta có $y' = -f'(2 - x)$.
Hàm số này đồng biến trên $(a; b)$ khi và chỉ khi $y' > 0, \forall x \in (a; b) \Leftrightarrow f(2 - x) < 0, \forall x \in (a; b)$.
Nhìn vào đồ thị ta thấy $f(2 - x) < 0$ khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} 2 - x < -1 \\ 1 < 2 - x < 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ -2 < x < 1. \end{array}\right.$
Hay hàm số $y = f(2 - x)$ đồng biến trên hai khoảng $(-2; 1)$ và $(3; +\infty)$.
Chọn phương án **A.** □

1.16 (Đề chính thức 2019). Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như hình bên. Hàm số $y = f(3 - 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

A. $(1; 2)$. **B.** $(4; +\infty)$.
C. $(2; 4)$. **D.** $(-2; 1)$.

Lời giải.
Hàm số $f'(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $y = f(3 - 2x)$ có tập xác định là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = -2f'(3 - 2x)$. Từ bảng xét dấu của $f'(x)$, suy ra

$$y' = 0 \Leftrightarrow f'(3 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 - 2x = -3 \\ 3 - 2x = -1 \\ 3 - 2x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 2 \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số $y = f(3-2x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(2;3)$. Do đó hàm số $y = f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$.
Chọn phương án **D.** □

1.17 (Đề tham khảo 2019). Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = 3f(x+2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?
A. $(0;2)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-\infty;-1)$.
Lời giải.

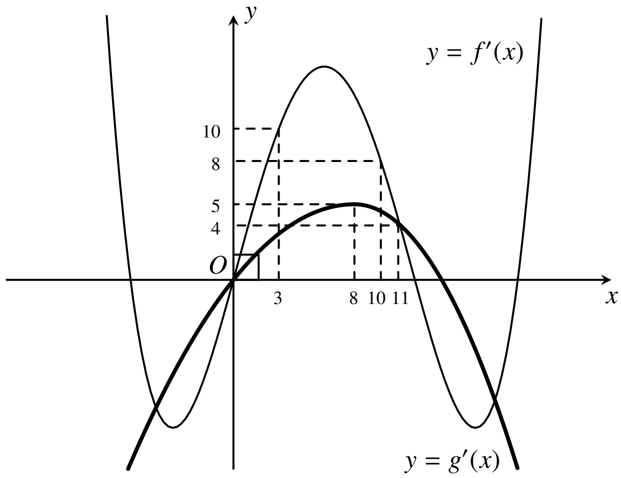
C1: Ta có $y' = 3f'(x+2) - 3x^2 + 3$.
Ta có $y'\left(\frac{3}{2}\right) = 3f\left(\frac{7}{2}\right) - \frac{15}{4} < 0$ nên loại các phương án $(1;+\infty)$ và $(0;2)$.
Lại có $y'(-2) = 3f(0) - 9 < 0$ nên loại phương án $(-\infty;-1)$.

C2: Ta có $y' = 3f'(x+2) - 3x^2 + 3 = 3\left[f'(x+2) + 1 - x^2\right]$.
Với $x \in (-1;0) \Rightarrow x+2 \in (1;2)$, từ bảng xét dấu suy ra $f'(x+2) > 0$.
Hơn nữa khi $x \in (-1;0)$ thì $1 - x^2 > 0$ nên suy ra $y' > 0, \forall x \in (-1;0)$.

Chọn phương án **C.** □

1.18 (Đề chính thức 2018). Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$. Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong **đậm hơn** là đồ thị của hàm số $y = g'(x)$. Hàm số $h(x) = f(x+4) - g\left(2x - \frac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(6;\frac{25}{4}\right)$. **B.** $\left(\frac{9}{4};3\right)$.
C. $\left(\frac{31}{5};+\infty\right)$. **D.** $\left(5;\frac{31}{5}\right)$.



Lời giải.
Ta có $h'(x) = f'(x+4) - 2g'\left(2x - \frac{3}{2}\right)$.
Xét $x = 6{,}1$, ta có $h'(6{,}1) = f'(10{,}1) - 2g'(10{,}7)$; từ đồ thị ta có $f'(10{,}1) < f'(10) = 8$ và $2g'(10{,}7) > 2g'(11) = 8 \Rightarrow h'(6{,}1) < 0$ nên loại phương án A và D.
Xét $x = 6{,}25$, ta có $h'(6{,}25) = f'(10{,}25) - 2g'(11)$; từ đồ thị ta có $f'(10{,}25) < f'(10) = 8$ và $2g'(1) = 8 \Rightarrow h'(6{,}25) < 0$ nên loại phương án C.
Chọn phương án **B.** □

4. Điều kiện đơn điệu của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

1.19 (Đề tham khảo 2020). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải.
Ta có $y' = x^2 + 2mx + 4$; $\Delta' = m^2 - 4$.
Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ m^2 - 4 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leqslant m \leqslant 2.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn phương án **B.** □

1.20 (Đề chính thức 2017). Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m + 9)x + 5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. 7. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải.
Ta có $y' = -3x^2 - 2mx + 4m + 9$; $\Delta' = m^2 + 3(4m + 9) = m^2 + 12m + 27$.
Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$ khi và chỉ khi $\Delta' \leqslant 0 \Leftrightarrow m^2 + 12m + 27 \leqslant 0 \Leftrightarrow -9 \leqslant m \leqslant -3$.
Suy ra có 7 giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$.
Chọn phương án **A.** □

1.21 (Đề tham khảo 2017). Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \left(m^2 - 1\right)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải.

TH1: $m = 1$ ta có $y = -x + 4$ nên nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$ (thỏa mãn ycbt).

TH2: $m = -1$ ta có $y = -2x^2 - x + 4$ có đồ thị là parabol nên không thể nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$ (không thỏa mãn ycbt).

TH3: $m \neq \pm 1$ ta có $y' = 3(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x - 1$. Do đó nếu hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$ thì $m^2 - 1 < 0$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 0$. Với $m = 0$ ta có $y' = -3x^2 - 2x - 1$ có $\Delta' = 1 - 3 = -2 < 0$ nên hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$ (thỏa mãn ycbt).

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn phương án **B.** □

5. Điều kiện đơn điệu của hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

1.22 (Đề chính thức 2020). Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x + 4}{x + m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -7)$ là

A. $(4; +\infty)$. **B.** $[4; 7)$. **C.** $(4; 7)$. **D.** $(4; 7]$.

Lời giải.
Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.
Ta có $y' = \dfrac{m - 4}{(x + m)^2}$.
Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -7)$ khi và chỉ khi

$$y' > 0, \forall x \in (-\infty; -7) \Leftrightarrow \begin{cases} m - 4 > 0 \\ -m \notin (-\infty; -7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ -m \geqslant -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m \leqslant 7 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < m \leqslant 7.$$

Vậy $m \in (4; 7]$.
Chọn phương án **D.** □

1.23 (Đề chính thức 2018). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -10)$?

A. 3. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 2.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-5m\}$; $y' = \dfrac{5m-2}{(x+5m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -10)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y' > 0, \forall x \in (-\infty; -10) \\ -5m \notin (-\infty; -10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m - 2 > 0 \\ -5m \geqslant -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{2}{5} \\ m \leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{2}{5} < m \leqslant 2.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2\}$. Vậy, có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án **D.** □

1.24 (Đề tham khảo 2020). Cho hàm số $f(x) = \dfrac{mx-4}{x-m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{-m^2+4}{(x-m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$f'(x) > 0,\ \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 4 > 0 \\ m \notin (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leqslant 0.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 0\}$. Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án **D.** □

1.25 (Đề minh họa 2016). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$.

A. $m \leqslant 0$ hoặc $1 \leqslant m < 2$. **B.** $1 \leqslant m < 2$.

C. $m \leqslant 0$. **D.** $m \geqslant 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}(\tan x - m) - (\tan x - 2)\dfrac{1}{\cos^2 x}}{(\tan x - m)^2} = \dfrac{2-m}{\cos^2 x(\tan x - m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} y' > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) &\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x \neq m, \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right) \\ 2 - m > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \notin (0; 1) \\ m < 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leqslant 0 \\ 1 \leqslant m < 2. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Chọn phương án **A.** □

§2. Cực Trị Của Hàm Số

1. Cực trị của hàm số cho bởi công thức

1.26 (Đề chính thức 2019). Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+2)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, dễ thấy hàm số đã cho có một điểm cực trị.

Chọn phương án **C.** □

1.27 (Đề tham khảo 2019). Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+2)^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên, dễ thấy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Chọn phương án **B.** □

1.28 (Đề chính thức 2020). Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+4)^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -4. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-4		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	CT	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	CT	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số đã cho có 1 điểm cực đại.

Chọn phương án **C.** □

1.29 (Đề minh họa 2016). Tìm giá trị cực đại $y_{CĐ}$ của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

A. $y_{CĐ} = -1$. **B.** $y_{CĐ} = 0$. **C.** $y_{CĐ} = 1$. **D.** $y_{CĐ} = 4$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị cực đại của hàm số là $y_{CĐ} = 4$.

Chọn phương án **D.** □

1.30 (Đề thử nghiệm 2017). Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Cực tiểu của hàm số bằng 2. **B.** Cực tiểu của hàm số bằng -6.

C. Cực tiểu của hàm số bằng -3. **D.** Cực tiểu của hàm số bằng 1.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 1 \end{array}\right.$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-6	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và giá trị cực tiểu bằng 2.

Chọn phương án **A.** □

1.31 (Đề chính thức 2017). Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB?

A. $N(1; -10)$. **B.** $M(0; -1)$. **C.** $Q(-1; 10)$. **D.** $P(1; 0)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 9$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$, suy ra $A(-1; 6)$, $B(3; -26)$.

Do đó AB có phương trình $\dfrac{x + 1}{3 + 1} = \dfrac{y - 6}{-26 - 6} \Leftrightarrow 8(x + 1) + 1(y - 6) = 0 \Leftrightarrow 8x + y + 2 = 0$.

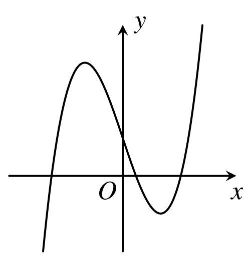
Kiểm tra ta thấy $N(1; -10)$ thuộc AB.

Chọn phương án **A.** □

2. Cực trị của hàm số cho bởi bảng biến thiên hoặc đồ thị

1.32 (Đề chính thức 2018). Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.



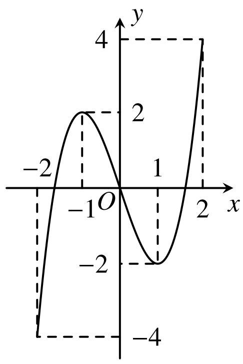
Lời giải.

Dựa vào đồ thị dễ thấy hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

Chọn phương án **B.** □

1.33 (Đề thử nghiệm 2017). Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

A. $x = 2$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 1$.



Lời giải.
Đồ thị hàm số có điểm cực đại $(-1; 2)$ nên hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = -1$.
Chọn phương án **B.** □

1.34 (Đề chính thức 2020). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. $x = -1$. **B.** $x = 3$.
C. $x = -3$. **D.** $x = 2$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	2	↘	$-\infty$

Lời giải.
Từ bảng biến thiên, suy ra điểm cực đại của hàm số đã cho là $x = 3$.
Chọn phương án **B.** □

1.35 (Đề tham khảo 2020). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** -4. **D.** 0.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-4	↗	$+\infty$

Lời giải.
Từ hình vẽ, suy ra giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng -4.
Chọn phương án **C.** □

1.36 (Đề tham khảo 2018). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số đạt cực đại tại điểm

A. $x = 0$. **B.** $x = 5$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 1$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	5	↘	$-\infty$

Lời giải.
Từ bảng bảng thiên dễ thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.
Chọn phương án **C.** □

1.37 (Đề chính thức 2019). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

A. $x = -1$. **B.** $x = -3$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = 2$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-3	↗	1	↘	$-\infty$

Lời giải.
Từ bảng biến thiên, dễ thấy hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm $x = -1$.
Chọn phương án **A.** □

1.38 (Đề tham khảo 2019). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

A. 1. **B**. 2. **C**. 0. **D**. 5.

Lời giải.
Từ bảng biến thiên, dễ thấy giá trị cực đại của hàm số là $y_{CĐ} = y(2) = 5$.
Chọn phương án **D.** □

1.39 (Đề chính thức 2017). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

A. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0.
B. Hàm số có ba điểm cực trị.
C. Hàm số có hai điểm cực tiểu.
D. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3.

Lời giải.
Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có giá trị cực đại là 3 và giá trị cực tiểu là 0.
Chọn phương án **A.** □

1.40 (Đề chính thức 2020). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

A. 2. **B**. 0. **C**. 3. **D**. -5.

Lời giải.
Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số có giá trị cực tiểu bằng -5.
Chọn phương án **D.** □

1.41 (Đề tham khảo 2020). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số đã cho đạt cực đại tại

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

A. $x = -1$. **B**. $x = 1$.
C. $x = 2$. **D**. $x = -2$.

Lời giải.
Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.
Chọn phương án **A.** □

1.42 (Đề tham khảo 2020). Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
A. 0. **B**. 2. **C**. 1. **D**. 3.

Lời giải.
Từ bảng xét dấu, suy ra hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.
Vậy số điểm cực trị của hàm số đã cho là 2.
Chọn phương án **B.** □

1.43 (Đề tham khảo 2020). Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 0.

Lời giải.

Nếu hàm số có đạo hàm tại x_0 và đổi dấu khi qua x_0 thì đạt cực trị tại x_0.

Dựa vào hình vẽ, suy ra hàm số có hai điểm cực trị $x = -2$ và $x = 0$.

Chọn phương án **C**. □

1.44 (Đề chính thức 2020). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	0	$-$	

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. 3. **B**. 1. **C**. 4. **D**. 2.

Lời giải.

Từ bảng xét dâu, suy ra hàm số có hai điểm cực đại là $x = -1$ và $x = 1$.

Chọn phương án **D**. □

3. Điều kiện để hàm số đạt cực trị tại x_0

1.45 (Đề chính thức 2018). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m - 2)x^5 - (m^2 - 4)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. 4. **B**. 5. **C**. 3. **D**. Vô số.

Lời giải.

Ta có $y' = 8x^7 + 5(m-2)x^4 - 4(m^2-4)x^3 = x^3\left(8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4)\right)$.

Đặt $f(x) = 8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4)$, ta xét hai trường hợp:

<u>TH1</u>: $f(0) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$.
Với $m = 2 \Rightarrow y' = 8x^7 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực tiểu.
Với $m = -2 \Rightarrow y' = x^4\left(8x^3 - 20\right) \Rightarrow x = 0$ không phải là điểm cực tiểu.

<u>TH2</u>: $f(0) \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$.
Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ khi và chỉ khi $y' = x^3 \cdot f(x)$ đổi dấu từ $-$ qua $+$ khi qua $x = 0$.
Điều này tương đương với $\lim\limits_{x\to 0} f(x) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Kết hợp ta có bốn giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án **A**. □

4. Cực trị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

1.46 (Đề thử nghiệm 2017). Biết $M(0;2), N(2;-2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tính giá trị của hàm số tại $x = -2$.

A. $y(-2) = 2$. **B**. $y(-2) = -18$. **C**. $y(-2) = 6$. **D**. $y(-2) = 22$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Vì $M(0;2)$, $N(2;-2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số nên ta có

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(2) = 0 \\ y(2) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 2 \\ 12a + 4b + c = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 2 \\ a = 1 \\ b = -3. \end{cases}$$

Suy ra $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Vậy $y(-2) = -18$.

Chọn phương án **B**. □

1.47 (Đề tham khảo 2017). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + \left(m^2 - 1\right)x$ có hai điểm cực trị là A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $y = 5x - 9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 6. **B.** -6. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - 1$; $\Delta' = m^2 - (m^2 - 1) = 1 > 0$.

Do đó đồ thị hàm số đã cho luôn có hai điểm cực trị A và B.

Lại có $y'' = 2x - 2m$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = m$, suy ra đồ thị hàm số có tâm đối xứng $I\left(m; \frac{1}{3}m^3 - m\right)$.

Theo tính chất đồ thị hàm số bậc ba ta có I là trung điểm của AB.

Vì A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $y = 5x - 9$ nên I thuộc đường thẳng $y = 5x - 9$.

Do đó ta có $\frac{1}{3}m^3 = 5m - 9 \Leftrightarrow m^3 + 18m - 27 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = \dfrac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$

Khi đó tổng các phần tử của S là $3 + \dfrac{-3 + 3\sqrt{5}}{2} + \dfrac{-3 - 3\sqrt{5}}{2} = 0$.

Chọn phương án **D.** □

5. Cực trị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$

1.48 (Đề tham khảo 2017). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m - 1)x^4 - 2(m - 3)x^2 + 1$ không có cực đại.

A. $m \leqslant 1$. **B.** $1 < m \leqslant 3$. **C.** $1 \leqslant m \leqslant 3$. **D.** $m \geqslant 1$.

Lời giải.

TH1: $m = 1$, ta có $y = 4x^2 + 1$ có đồ thị là parabol quay bề lõm lên trên nên không có cực đại.

TH2: $m \neq 1$, hàm số trở thành một hàm số trùng phương.

Do đó hàm số không có cực đại khi và chỉ khi $\begin{cases} a > 0 \\ b \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \leqslant 3$.

Kết hợp ta có $1 \leqslant m \leqslant 3$.

Chọn phương án **C.** □

1.49 (Đề minh họa 2016). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

A. $m = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. **D.** $m = -1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 + 4mx = 4x(x^2 + m)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -m. \end{array}\right.$

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $-m > 0 \Leftrightarrow m < 0$, suy ra loại phương án $m = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ và $m = 1$.

Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $A(0; 1)$, $B\left(-\sqrt{-m}; 1 - m^2\right)$, $C\left(\sqrt{-m}; 1 - m^2\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} = \left(-\sqrt{-m}; -m^2\right)$, $\overrightarrow{AC} = \left(\sqrt{-m}; -m^2\right) \Rightarrow \triangle ABC$ cân tại A.

Do đó $\triangle ABC$ vuông cân $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow m + m^4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \text{ (loại)} \\ m = -1. \end{array}\right.$

Chọn phương án **D.** □

§3. Giá Trị Lớn Nhất Và Giá Trị Nhỏ Nhất Của Hàm Số

1. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số cho bởi công thức

1.50 (Đề chính thức 2020). Giá tri nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 10x^2 - 4$ trên đoạn $[0; 9]$ bằng

A. -13. **B.** -29. **C.** -4. **D.** -28.

Lời giải.
Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[0;9]$.

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 20x = 4x\left(x^2 - 5\right)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \notin [0;9]. \end{array}\right.$

Lại có $f(0) = -4$, $f(9) = 5747$, $f\left(\sqrt{5}\right) = -29$.
Vậy $\min\limits_{[0;9]} f(x) = f\left(\sqrt{5}\right) = -29$.
Chọn phương án **B.** □

1.51 (Đề tham khảo 2020). Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. 1. **B.** 12. **C.** 37. **D.** 33.

Lời giải.
Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $[-1;2]$.

Ta có $f'(x) = -4x^3 + 24x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 24x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{6} \notin [-1;2]. \end{array}\right.$

Khi đó $f(-1) = 12$, $f(0) = 1$, $f(2) = 33$.
Vậy $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(2) = 33$.
Chọn phương án **D.** □

1.52 (Đề chính thức 2018). Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 9$ trên đoạn $[-2;3]$ bằng

A. 54. **B.** 9. **C.** 2. **D.** 201.

Lời giải.
Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-2;3]$.

Ta có $y' = 4x^3 - 8x$; $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Khi đó $y(-2) = 9$, $y(3) = 54$, $y(0) = 9$, $y\left(-\sqrt{2}\right) = 5$, $y\left(\sqrt{2}\right) = 5$.
Vậy $\max\limits_{[-2;3]} y = y(3) = 54$.
Chọn phương án **A.** □

1.53 (Đề chính thức 2020). Giá trị nhỏ nhất của của hàm số $f(x) = x^3 - 24x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. -45. **B.** $32\sqrt{2}$. **C.** $-32\sqrt{2}$. **D.** -40.

Lời giải.
Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $[2;19]$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 24$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\sqrt{2} \\ x = -2\sqrt{2} \notin [2;19]. \end{array}\right.$

Lại có $f(2) = -40$; $f(19) = 6043$; $f\left(2\sqrt{2}\right) = -32\sqrt{2}$.
Vậy $\min\limits_{[2;19]} f(x) = -32\sqrt{2}$.
Chọn phương án **C.** □

1.54 (Đề tham khảo 2018). Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$ trên đoạn $[-2;3]$ bằng

A. 122. **B.** 50. **C.** 1. **D.** 5.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 8x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Khi đó $f(-2) = 5$; $f(3) = 50$; $f(0) = 5$; $f\left(\pm\sqrt{2}\right) = 1$. Do đó $\max\limits_{[-2;3]} f(x) = f(3) = 50$.
Chọn phương án **B.** □

1.55 (Đề tham khảo 2020). Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 10x^2 + 2$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. -23. **B.** -7. **C.** 2. **D.** -22.

Lời giải.
Hầm số đã cho là hàm đa thức nên liên tục trên $[-1;2]$.

Ta có $y' = 4x^3 - 20x = 4x\left(x^2-5\right)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{5} \notin [-1;2]. \end{array}\right.$

Khi đó $y(-1) = -7$, $y(2) = -22$, $y(0) = 2$.
Vậy $\min\limits_{[-1;2]} y = y(2) = -22$.
Chọn phương án **D.** □

1.56 (Đề minh họa 2016). Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.

A. $\min\limits_{[2;4]} y = 6$. **B.** $\min\limits_{[2;4]} y = -3$. **C.** $\min\limits_{[2;4]} y = \dfrac{19}{3}$. **D.** $\min\limits_{[2;4]} y = -2$.

Lời giải.
Ta có $y' = \dfrac{2x(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \notin [2;4] \\ x = 3. \end{array}\right.$

Khi đó $y(2) = 7$, $y(3) = 6$, $y(4) = \dfrac{19}{3}$. Vậy $\min\limits_{[2;4]} y = 6$.
Chọn phương án **A.** □

1.57 (Đề chính thức 2019). Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. 4. **B.** -16. **C.** 20. **D.** 0.

Lời giải.

C1: Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$. Khi đó $f(-3) = -16$, $f(-1) = 4$, $f(1) = 0$, $f(3) = 20$. Vậy $\max\limits_{[-3;3]} f(x) = f(3) = 20$.

C2: Dùng chức năng MODE 7 trong máy tính, với STAR -3, END 3, STEP 0,5.

Chọn phương án **C.** □

1.58 (Đề chính thức 2017). Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $m = 0$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = 11$.

Lời giải.

C1: Ta có $y' = 3x^2 - 14x + 11$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{11}{3} \notin [0;2] \end{array}\right.$.
Lại có $y(0) = -2$, $y(1) = 3$, $y(2) = 0$, suy ra $m = -2$.

C2: Sử dụng máy tính, chọn MODE 7. Nhập vào máy tính biểu thức $x^3 - 7x^2 + 11x - 2$.
Chọn Start 0, End 2, Step 0,2. Dò ta được $m = -2$.

Chọn phương án **B.** □

1.59 (Đề chính thức 2017). Cho hàm số $y = \dfrac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $3 < m \leqslant 4$. **B.** $1 \leqslant m < 3$. **C.** $m < -1$. **D.** $m > 4$.

Lời giải.
Với $m = -1$, ta có $y = 1$ không thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y = 3$.

Với $m \neq -1$, ta có $y' = \dfrac{-1-m}{(x-1)^2}$, $y(2) = m+2$, $y(4) = \dfrac{m+4}{3}$.

Khi đó $\min\limits_{[2;4]} y = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y' > 0 \\ y(2) = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} y' < 0 \\ y(4) = 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1-m > 0 \\ m+2 = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} -1-m < 0 \\ \dfrac{m+4}{3} = 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m < -1 \\ m = 1 \text{ (loại)} \end{cases} \\ \begin{cases} m > -1 \\ m = 5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m = 5.$

Chọn phương án **D.** □

1.60 (Đề tham khảo 2017). Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \dfrac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $\min\limits_{(0;+\infty)} y = 7$. **B.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y = 2\sqrt[3]{9}$. **C.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$. **D.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y = \dfrac{33}{5}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3 - \dfrac{8}{x^3}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$; $y\left(\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}\right) = 3\sqrt[3]{9}$. Bảng biến thiên

x	0		$\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$3\sqrt[3]{9}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min\limits_{(0;+\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$.

Chọn phương án **C.** □

2. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số cho bởi bảng biến thiên hoặc đồ thị

1.61 (Đề minh họa 2016). Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định **đúng**?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

B. Hàm số có đúng một cực trị.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Lời giải.

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Chọn phương án **D.** □

1.62 (Đề tham khảo 2017). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

A. $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 5$. **B.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y = 4$.

C. $y_{CĐ} = 5$. **D.** $y_{CT} = 0$.

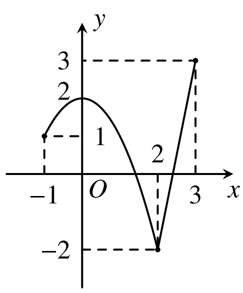
Lời giải.

Nhìn vào bảng biến thiên dễ thấy hàm số có giá trị cực đại bằng 5.

Chọn phương án **C.** □

1.63 (Đề tham khảo 2019). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của $M - m$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 4.



Lời giải.
Từ đồ thị ta có $M = f(3) = 3$, $m = f(2) = -2$. Vậy $M - m = 3 - (-2) = 5$.
Chọn phương án **C.** □

3. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

1.64 (Đề tham khảo 2018). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|x^3 - 3x + m\right|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 6. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 0.

Lời giải.
Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$ trên $[0; 2]$ có $f'(x) = 3x^2 - 3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
Ta có $f(0) = m$; $f(2) = m + 2$; $f(1) = m - 2$.
Suy ra $\max\limits_{[0;2]} f(x) = f(2) = m + 2$; $\min\limits_{[0;2]} f(x) = f(1) = m - 2$.
Do đó $\max\limits_{[0;2]} y = \max\{|m + 2|; |m - 2|\}$.
Với $m \geqslant 0$, ta có $\max\limits_{[0;2]} y = |m + 2| = m + 2 \Leftrightarrow 3 = m + 2 \Leftrightarrow m = 1$.
Với $m < 0$, ta có $\max\limits_{[0;2]} y = |m - 2| = 2 - m \Leftrightarrow 3 = 2 - m \Leftrightarrow m = -1$.
Vậy $S = \{1; -1\}$ nên S có 2 phần tử.
Chọn phương án **C.** □

1.65 (Đề tham khảo 2020). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \left|x^3 - 3x + m\right|$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng 16. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -16. **B**. 16. **C**. -12. **D**. -2.

Lời giải.
Xét $g(x) = x^3 - 3x + m$ trên $[0; 3]$.
Hàm số $g(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $[0; 3]$.
Ta có $g'(x) = 3x^2 - 3$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \notin [0; 3]. \end{array}\right.$
Khi đó $g(0) = m$, $g(1) = m - 2$, $g(3) = m + 18$, do đó $\max\limits_{[0;3]} g(x) = m + 18$, $\min\limits_{[0;3]} g(x) = m - 2$.
Từ đó suy ra $\max\limits_{[0;3]} f(x) = \max\limits_{[0;3]} |g(x)| = \max\{|m + 18|; |m - 2|\}$.

$$\text{Theo giả thiết } \max\limits_{[0;3]} f(x) = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |m + 18| = 16 \\ |m - 2| \leqslant 16 \end{cases} \\ \begin{cases} |m - 2| = 16 \\ |m + 18| \leqslant 16 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = -14. \end{array}\right.$$

Vậy tổng tất cả các phần tử của S là $(-2) + (-14) = -16$.
Chọn phương án **A.** □

1.66 (Đề tham khảo 2020). Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x + m}{x + 1}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[0;1]} |f(x)| + \min\limits_{[0;1]} |f(x)| = 2$. Số phần tử của S là

A. 4. **B**. 6. **C**. 1. **D**. 2.

Lời giải.
Với $m = 1$, ta có $f(x) = 1, \forall x \neq -1$.
Do đó $\max\limits_{[0;1]} |f(x)| = \min\limits_{[0;1]} |f(x)| = 1 \Rightarrow \max\limits_{[0;1]} |f(x)| + \min\limits_{[0;1]} |f(x)| = 2$ (thỏa mãn).
Với $m \neq 1$, ta có $f'(x) = \dfrac{1 - m}{(x + 1)^2}$ không đổi dấu trên $[0; 1]$, suy ra $f(x)$ đơn điệu trên $[0; 1]$.
Ta có $f(0) = m$, $f(1) = \dfrac{1 + m}{2}$.

TH1: $m \cdot \dfrac{1+m}{2} \leqslant 0 \Leftrightarrow -1 \leqslant m \leqslant 0$, ta có

$$\begin{cases} \min\limits_{[0;1]} |f(x)| = 0 \\ \max\limits_{[0;1]} |f(x)| = \max\left\{|m|; \left|\dfrac{1+m}{2}\right|\right\} \leqslant 1. \end{cases}$$

Từ đó suy ra $\max\limits_{[0;1]} |f(x)| + \min\limits_{[0;1]} |f(x)| \leqslant 1$ (không thỏa mãn).

TH2: $m \cdot \dfrac{1+m}{2} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -1 \end{array}\right.$, ta có

$$\max\limits_{[0;1]} |f(x)| + \min\limits_{[0;1]} |f(x)| = |m| + \left|\dfrac{1+m}{2}\right| = \left|\dfrac{3m+1}{2}\right|.$$

Do đó $\max\limits_{[0;1]} |f(x)| + \min\limits_{[0;1]} |f(x)| = 2 \Leftrightarrow |3m+1| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \quad \text{(loại)} \\ m = -\dfrac{5}{3}. \end{array}\right.$

Vậy $S = \left\{1; -\dfrac{5}{3}\right\}$.
Chọn phương án **D.** □

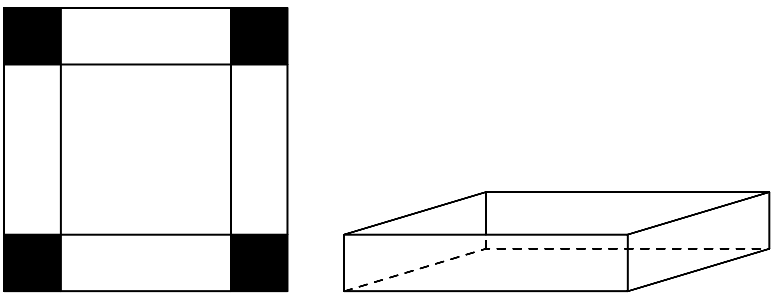
4. Ứng dụng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong bài toán thực tế

1.67 (Đề thử nghiệm 2017). Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\dfrac{1}{2}t^3 + 9t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 54 (m/s). **B.** 30 (m/s). **C.** 216 (m/s). **D.** 400 (m/s).

Lời giải.
Vận tốc của vật tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = -\dfrac{3}{2}t^2 + 18t$.
Cần tìm giá trị lớn nhất của $v(t)$ trên $[0; 10]$.
Ta có $v'(t) = -3t + 18$; $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 6$; $v(0) = 0, v(10) = 30, v(6) = 54$.
Vậy vận tốc lớn nhất của vật đạt được là 54 (m/s).
Chọn phương án **A.** □

1.68 (Đề minh họa 2016). Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



A. $x = 6$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = 3$. **D.** $x = 4$.

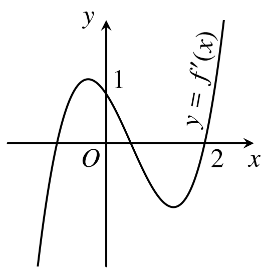
Lời giải.
Hộp nhận được có đáy là hình vuông cạnh $12 - 2x$ (cm) và chiều cao x (cm).
Do đó thể tích của hộp nhận được là $V = x(12-2x)^2 = 4x^3 - 48x^2 + 144x$.
Xét hàm số $f(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$ trên $(0; 6)$.
Ta có $f'(x) = 12x^2 - 96x + 144$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Bảng biến thiên

x	0		2		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	128	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên ta có $\max\limits_{(0,6)} f(x) = f(2) = 128$.
Vậy hộp có thể tích lớn nhất khi $x = 2$ (cm).
Chọn phương án **B.** □

5. Ứng dụng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong bài toán giải phương trình, bất phương trình

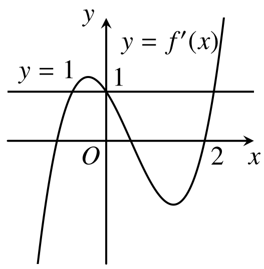
1.69 (Đề chính thức 2019). Cho hàm số $f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x) < x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi



A. $m > f(2) - 2$.
B. $m \geqslant f(0)$.
C. $m \geqslant f(2) - 2$.
D. $m > f(0)$.

Lời giải.
Ta có

$$f(x) < x + m \Leftrightarrow m > f(x) - x. \quad (1)$$



Xét hàm số $g(x) = f(x) - x$ trên $(0; 2)$ có $g'(x) = f'(x) - 1$. Từ hình vẽ, ta thấy $f'(x) < 1, \forall x \in (0; 2)$, suy ra $g'(x) < 0, \forall x \in (0; 2)$. Do đó $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 2)$. Vậy, (1) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi $m \geqslant g(0) \Leftrightarrow m \geqslant f(0)$.

Chọn phương án **B.** □

1.70 (Đề tham khảo 2018). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$\sqrt[3]{m + 3\sqrt[3]{m + 3\sin x}} = \sin x$$

có nghiệm thực?

A. 3. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải.
Đặt $\sin x = u$ và $\sqrt[3]{m + 3\sin x} = v$, với $|u| \leqslant 1$, ta có hệ $\begin{cases} m + 3v = u^3 & (1) \\ m + 3u = v^3. & (2) \end{cases}$
Trừ theo vế (1) và (2) ta có $3v - 3u = u^3 - v^3 \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow u = v$.
Với $u = v$ thay vào (1) được $m + 3u = u^3 \Leftrightarrow m = u^3 - 3u$. (3)
Xét hàm số $g(u) = u^3 - 3u$ trên $[-1; 1]$ có $g'(u) = 3u^2 - 3 \leqslant 0, \forall u \in [-1; 1]$.
Bảng biến thiên

u	-1		1
$g'(u)$		$-$	
$g(u)$	2	$\searrow$	-2

Từ bảng biến thiên suy ra (3) có nghiệm khi và chỉ khi $-2 \leqslant m \leqslant 2$.
Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn phương án **C.** □

6. Ứng dụng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong bài toán tìm điều kiện để hàm số đơn điệu trên khoảng cho trước

1.71 (Đề chính thức 2020). Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (4 - m)x$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ là

A. $(-\infty; 4]$. **B.** $(-\infty; 1)$. **C.** $(-\infty; 1]$. **D.** $(-\infty; 4)$.

Lời giải.
Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 4 - m$.
Hàm số đã cho đồng biến trên $(2; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$y' \geqslant 0,\ \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 4 - m \geqslant 0,\ \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow m \leqslant 3x^2 - 6x + 4,\ \forall x \in (2; +\infty). \quad (1)$$

Xét $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$ trên $(2; +\infty)$ có $f'(x) = 6x - 6$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \notin (2; +\infty)$.
Bảng biến thiên

x	2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra $(1) \Leftrightarrow m \leqslant 4$.
Chọn phương án **A.** □

1.72 (Đề tham khảo 2019). Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (4m - 9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ là

A. $[0; +\infty)$. **B.** $\left(-\infty; -\dfrac{3}{4}\right]$. **C.** $(-\infty; 0]$. **D.** $\left[-\dfrac{3}{4}; +\infty\right)$.

Lời giải.
Ta có $y' = -3x^2 - 12x + 4m - 9$.
Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ khi và chỉ khi $-3x^2 - 12x + 4m - 9 \leqslant 0, \forall x \in (-\infty; -1)$.
Hay $4m \leqslant 3x^2 + 12x + 9, \forall x \in (-\infty; -1)$. (1)
Xét $g(x) = 3x^2 + 12x + 9$ trên $(-\infty; -1)$ có $g'(x) = 6x + 12$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-2

Từ bảng biến thiên ta có $(1) \Leftrightarrow 4m \leqslant -3 \Leftrightarrow m \leqslant -\dfrac{3}{4}$.
Chọn phương án **B.** □

1.73 (Đề tham khảo 2018). Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx - \dfrac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. 3. **B.** 0. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải.
Ta có $y' = 3x^2 + m + \dfrac{1}{x^6}$. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$3x^2 + m + \frac{1}{x^6} \geqslant 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \geqslant -3x^2 - \frac{1}{x^6}, \forall x \in (0; +\infty) \quad (1)$$

Xét hàm số $g(x) = -3x^2 - \dfrac{1}{x^6}$ trên $(0; +\infty)$ có $g'(x) = -6x + \dfrac{6}{x^7}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
Lập bảng biến thiên ta có $\max\limits_{(0;\infty)} g(x) = g(1) = -4$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow m \geqslant -4$. Vì m nguyên âm nên $m \in \{-4; -3; -2; -1\}$.
Vậy có 4 giá trị nguyên âm của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn phương án **D**. □

§4. Đường Tiệm Cận Của Đồ Thị Hàm Số

1. Đường tiệm cận của hàm số cho bởi công thức

1.74 (Đề minh họa 2016). Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.
D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.

Lời giải.
Ta có

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$, suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -1$.

Chọn phương án **C**. □

1.75 (Đề thử nghiệm 2017). Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$?

A. $y = -1$. **B**. $x = 1$. **C**. $x = -1$. **D**. $y = 2$.

Lời giải.
Dễ thấy đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = -1$.
Chọn phương án **C**. □

1.76 (Đề chính thức 2020). Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x+1}{x-1}$ là

A. $y = \dfrac{1}{4}$. **B**. $y = -1$. **C**. $y = 4$. **D**. $y = 1$.

Lời giải.
Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 4$, do đó tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là $y = 4$.
Chọn phương án **C**. □

1.77 (Đề chính thức 2020). Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+2}{x-1}$ là

A. $x = 1$. **B**. $x = 2$. **C**. $x = -1$. **D**. $x = -2$.

Lời giải.
Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+2}{x-1}$ có tiệm cận đứng $x = 1$.
Chọn phương án **A**. □

1.78 (Đề tham khảo 2020). Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$ là

A. $y = 1$. **B**. $y = -2$. **C**. $x = -1$. **D**. $x = 2$.

Lời giải.
Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 1$, do đó đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $y = 1$.
Chọn phương án **A**. □

1.79 (Đề tham khảo 2018). Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$. **B**. $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$. **C**. $y = \sqrt{x^2-1}$. **D**. $y = \dfrac{x}{x+1}$.

Lời giải.
Dễ thấy đồ thị hàm số $y = \dfrac{x}{x+1}$ có tiệm cận đứng $x = -1$.
Chọn phương án **D**. □

1.80 (Đề tham khảo 2020). Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1}$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải.
Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$.
Ta có

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 5$, suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 5$.
- $\lim\limits_{x \to 1^+} y = 3$, $\lim\limits_{x \to 1^-} y = 3$, suy ra $x = 1$ không phải là tiệm cận đứng.
- $\lim\limits_{x \to -1^+} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -1^-} y = +\infty$, suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$.

Vậy tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là 2.
Chọn phương án **B.** □

1.81 (Đề chính thức 2017). Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$.

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.
Ta có $x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 4$. Khi đó

- $\lim\limits_{x \to 4^+} y = \dfrac{5}{8}$, $\lim\limits_{x \to 4^-} y = \dfrac{5}{8}$ nên $x = 4$ không phải là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho;
- $\lim\limits_{x \to -4^+} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -4^-} y = +\infty$ nên $x = -4$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng.
Chọn phương án **C.** □

1.82 (Đề chính thức 2018). Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+9} - 3}{x^2 + x}$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải.
Tập xác định $\mathscr{D} = [-9; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.
Ta có $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{\sqrt{x+9} - 3}{x^2 + x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{\sqrt{x+9} - 3}{x^2 + x} = -\infty$, suy ra $x = -1$ là một tiệm cận đứng.
Lại có $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+9} - 3}{x^2 + x} = \dfrac{1}{6}$ nên $x = 0$ không phải là một tiệm cận đứng.
Vậy, đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng.
Chọn phương án **B.** □

1.83 (Đề thử nghiệm 2017). Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6}$

A. $x = -3$ và $x = -2$. **B.** $x = 3$ và $x = 2$. **C.** $x = -3$. **D.** $x = 3$.

Lời giải.
Ta có $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right.$. Do đó loại các phương án không chứa $x = 3$.
Cần kiểm tra xem $x = 2$ có phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số hay không.
Dùng máy tính tìm được $\lim\limits_{x \to 2^{\pm}} y = -\dfrac{7}{6}$ nên loại phương án chứa $x = 2$.
Chọn phương án **D.** □

2. Đường tiệm cận của hàm số cho bởi bảng biến thiên hoặc đồ thị

1.84 (Đề tham khảo 2019). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ 3	$\nearrow$	5

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.
Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 5 \Rightarrow y = 5$ là tiệm cận ngang.
Lại có $\lim\limits_{x\to1^+} y = +\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng.
Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là 3.
Chọn phương án **A.** □

1.85 (Đề tham khảo 2017). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$	-2		0		$+\infty$
y'		‖	$+$	‖	$-$	
y		‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ 1	$\searrow$	0

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải.
Từ bảng biến thiên ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 0$; $\lim\limits_{x\to0^-} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^+} y = -\infty$.
Do đó đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 0$ và hai tiệm cận đứng $x = -2$, $x = 0$.
Chọn phương án **B.** □

1.86 (Đề chính thức 2019). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	2	$\searrow$	-4 ‖ $+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.
Từ bảng biến thiên, ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-} y = -4$, $\lim\limits_{x\to0^+} y = +\infty$. Do đó đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận ngang $y = 2$ và đường tiệm cận đứng $x = 0$.
Chọn phương án **D.** □

3. Đường tiệm cận của hàm số chứa tham số

1.87 (Đề minh họa 2016). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang.

A. $m > 0$.
B. $m = 0$.
C. Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.
D. $m < 0$.

Lời giải.

<u>TH1</u>: $m = 0$, ta có $y = x + 1$ không có tiệm cận ngang.

<u>TH2</u>: $m < 0$, ta có $y = \dfrac{x+1}{|x|\sqrt{m + \dfrac{1}{x^2}}}$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y$.

Do đó đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

TH3: $m > 0$, ta có $y = \dfrac{x+1}{|x|\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}}$ nên $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{m}}$.

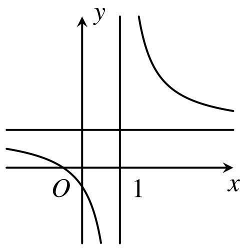
Do đó đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.

Chọn phương án **A.** □

§5. Khảo Sát Sự Biến Thiên Và Vẽ Đồ Thị Của Hàm Số

1. Nhận dạng hàm số dựa vào bảng biến thiên hoặc đồ thị

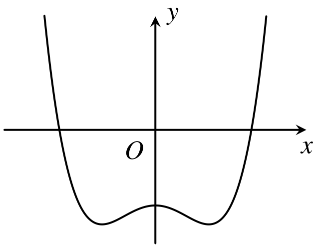
1.88 (Đề chính thức 2017). Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



A. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. **B.** $y' > 0, \forall x \neq 1$.
C. $y' < 0, \forall x \neq 1$. **D.** $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.
Từ đồ thị suy ra hàm số không xác định tại $x = 1$ nên loại các phương án $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Đồ thị đi xuống suy ra $y' < 0$ nên loại phương án $y' > 0, \forall x \neq 1$.
Chọn phương án **C.** □

1.89 (Đề chính thức 2017). Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



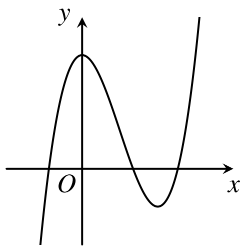
A. $y = -x^4 + x^2 - 1$. **B.** $y = x^3 - x^2 - 1$.
C. $y = x^4 - x^2 - 1$. **D.** $y = -x^3 + x^2 - 1$.

Lời giải.
Từ hình vẽ, ta thấy

- Đường cong có hình dáng của đồ thị hàm số trùng phương, do đó loại các phương án $y = -x^3 + x^2 - 1$ và $y = x^3 - x^2 - 1$;
- Đường cong quay bề lõm lên trên nên có hệ số $a > 0$, do đó loại phương án $y = -x^4 + x^2 - 1$.

Chọn phương án **C.** □

1.90 (Đề chính thức 2019). Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



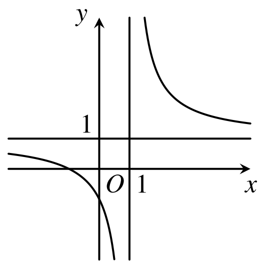
A. $y = -x^3 + 3x^2 + 3$. **B.** $y = x^3 - 3x^2 + 3$.
C. $y = x^4 - 2x^2 + 3$. **D.** $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

Lời giải.
Từ hình vẽ, ta thấy

- Đường cong có hình dáng của đồ thị hàm số bậc ba, do đó loại các phương án $y = x^4 - 2x^2 + 3$ và $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.
- Từ trái qua phải đường cong đi lên nên hệ số $a > 0$, do đó loại phương án $y = -x^3 + 3x^2 + 3$.

Chọn phương án **B.** □

1.91 (Đề tham khảo 2019). Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = x^3 - 3x - 1$. **B**. $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

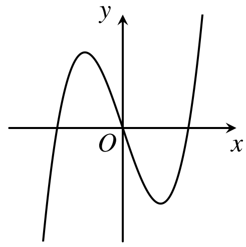
C. $y = x^4 + x^2 + 1$. **D**. $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Lời giải.
Từ hình vẽ, ta thấy

- Đường cong có hình dáng của đồ thị hàm số phân thức bậc nhất, do đó loại các phương án $y = x^4 + x^2 + 1$ và $y = x^3 - 3x - 1$.
- Đường cong cắt trục tung tại điểm có tung độ âm, do đó loại phương án $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

Chọn phương án **D**. □

1.92 (Đề tham khảo 2020). Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



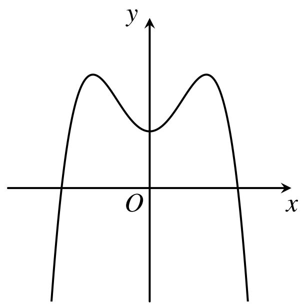
A. $y = x^4 - 2x^2$. **B**. $y = x^3 - 3x$.
C. $y = -x^3 + 3x$. **D**. $y = -x^4 + 2x^2$.

Lời giải.
Từ hình vẽ, suy ra

- Đường cong có hình dáng của đồ thị hàm số bậc ba nên loại các phương án $y = x^4 - 2x^2$ và $y = -x^4 + 2x^2$;
- Từ trái qua phải đường cong đi lên nên hệ số $a > 0$, do đó loại phương án $y = -x^3 + 3x$.

Vậy chọn phương án $y = x^3 - 3x$.
Chọn phương án **B**. □

1.93 (Đề chính thức 2020). Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



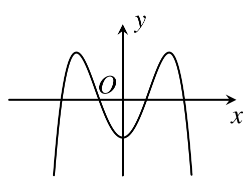
A. $y = x^3 - 3x^2 + 1$. **B**. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.
C. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. **D**. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Lời giải.
Từ hình vẽ, suy ra

- Đường cong có hình dáng của đồ thị hàm số trùng phương nên loại các phương án $y = x^3 - 3x^2 + 1$ và $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$ nên hệ số $a < 0$, do đó loại phương án $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Chọn phương án **B**. □

1.94 (Đề chính thức 2018). Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = x^4 - 3x^2 - 1$. **B**. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.
C. $y = -x^4 + 3x^2 - 1$. **D**. $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

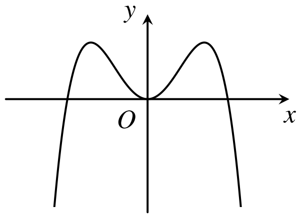
Lời giải.
Từ hình vẽ, ta thấy

- Đồ thị có hình dạng của đồ thị hàm số trùng phương, do đó nên loại phương án $y = x^3 - 3x^2 - 1$ và $y = -x^3 + 3x^2 - 1$;

- Đồ thị quay bề lõm xuống dưới nên có hệ số $a < 0$, do đó loại phương án $y = x^4 - 3x^2 - 1$.

Chọn phương án **C**. □

1.95 (Đề tham khảo 2020). Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y = x^4 - 2x^2$.
B. $y = -x^3 + 3x^2$.
C. $y = x^3 - 3x^2$.
D. $y = -x^4 + 2x^2$.

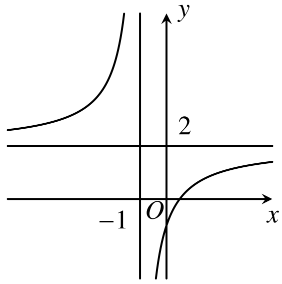
Lời giải.
Từ hình vẽ, suy ra

- Đường cong có hình dáng của đồ thị hàm số trùng phương, do đó loại các phương án $y = x^3 - 3x^2$ và $y = -x^3 + 3x^2$;

- $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$ nên có hệ số $a < 0$, do đó loại phương án $y = x^4 - 2x^2$.

Chọn phương án **D**. □

1.96 (Đề tham khảo 2017). Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?



A. $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.
B. $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$.
C. $y = \dfrac{2x-2}{x-1}$.
D. $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$.

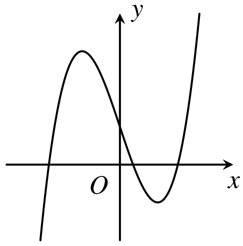
Lời giải.
Từ hình vẽ ta thấy

- Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$, do đó loại các phương án $y = \dfrac{2x-2}{x-1}$ và $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

- Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên loại phương án $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$.

Chọn phương án **D**. □

1.97 (Đề minh họa 2016). Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = x^3 - 3x + 1$.
B. $y = -x^2 + x - 1$.
C. $y = x^4 - x^2 + 1$.
D. $y = -x^3 + 3x + 1$.

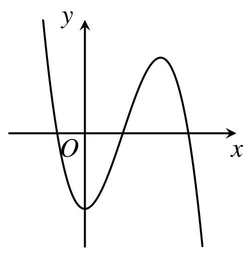
Lời giải.
Từ hình vẽ, ta thấy

- Đường cong có hình dạng của đồ thị hàm số bậc ba, do đó loại các phương án $y = -x^2 + x - 1$ và $y = x^4 - x^2 + 1$;

- $\lim\limits_{x \to +\infty} = +\infty$ nên hệ số $a > 0$, do đó loại phương án $y = -x^3 + 3x + 1$.

Chọn phương án **A.** □

1.98 (Đề chính thức 2020). Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



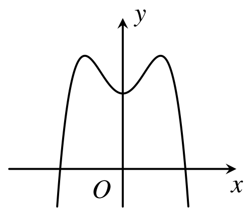
A. $y = x^4 - 2x^2 - 2$. **B.** $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.
C. $y = -x^4 + 2x^2 - 2$. **D.** $y = x^3 - 3x^2 - 2$.

Lời giải.
Từ hình vẽ, suy ra

- Đường cong có hình dáng của đồ thị hàm số bậc ba nên loại các phương án $y = x^4 - 2x^2 - 2$ và $y = -x^4 + 2x^2 - 2$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$ nên hệ số $a < 0$, do đó loại phương án $y = x^3 - 3x^2 - 2$.

Chọn phương án **B.** □

1.99 (Đề tham khảo 2018). Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



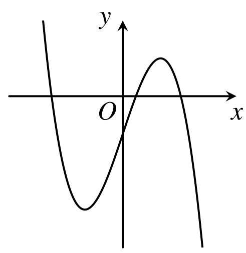
A. $y = -x^4 + 2x^2 + 2$. **B.** $y = x^4 - 2x^2 + 2$.
C. $y = -x^3 + 3x^2 + 2$. **D.** $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Lời giải.
Từ hình vẽ, ta thấy

- Đường cong có hình dạng của đồ thị hàm số trùng phương, do đó loại các phương án $y = x^3 - 3x^2 + 2$ và $y = -x^3 + 3x^2 + 2$;
- Đường cong quay bề lõm xuống dưới nên có hệ số $a < 0$, do đó loại phương án $y = x^4 - 2x^2 + 2$.

Chọn phương án **A.** □

1.100 (Đề tham khảo 2020). Cho hàm số $y = ax^3 + 3x + d$ $(a, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



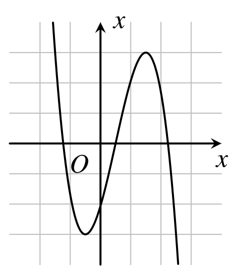
A. $a > 0; d < 0$. **B.** $a > 0; d > 0$. **C.** $a < 0; d > 0$. **D.** $a < 0; d < 0$.

Lời giải.
Từ hình vẽ, suy ra

- $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$ nên $a < 0$.
- đồ thị cắt Oy tại điểm có tung độ âm nên $d < 0$.

Chọn phương án **D.** □

1.101 (Đề thử nghiệm 2017). Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

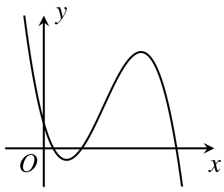


A. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$. **B.** $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.
C. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$. **D.** $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

Lời giải.

Dựa vào hình dáng đồ thị suy ra $a < 0$.
Đồ thị có hoành độ hai điểm cực trị trái dấu nên $ac < 0$ suy ra $c > 0$, do đó loại phương án $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$ và $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.
Dựa vào vị trí hai điểm cực trị suy ra tổng hoành độ hai điểm cực trị dương nên $ab < 0$ suy ra $b > 0$, do đó loại phương án $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.
Chọn phương án **D.** □

1.102 (Đề chính thức 2020). Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?



A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải.
Từ hình vẽ, suy ra

- $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$ nên hệ số $a < 0$.
- Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.
- Hàm số có hai điểm cực trị dương nên $ac > 0$, mà $a < 0$ nên $c < 0$.
- Đồ thị có tâm đối xứng nằm bên phải Oy nên $ab < 0$, mà $a < 0$ nên $b > 0$.

Vậy trong các số a, b, c, d có hai số dương là b và d.
Chọn phương án **A.** □

1.103 (Đề chính thức 2020). Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải.
Từ bảng biến thiên, suy ra

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ nên hệ số $a > 0$;
- $f(0) = 3 > 0$ nên hệ số $d > 0$;
- $f'(x)$ có một nghiệm bằng 0 nên $c = 0$;
- tâm đối xứng nằm bên phải Oy nên $ab < 0$, mà $a > 0$ nên $b < 0$.

Vậy trong các số a, b, c, d có 2 số dương.
Chọn phương án **B.** □

1.104 (Đề tham khảo 2020). Cho hàm số $f(x) = \dfrac{ax + 1}{bx + c}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như hình bên. Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải.
Ta có $f'(x) = \dfrac{ac - b}{(bx + c)^2}$.
Đồ thị hàm số $f(x)$ có đường tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{b}$ và đường tiệm cận đứng $x = -\dfrac{c}{b}$.

Từ bảng biến thiên suy ra

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b} = 1 \\ -\dfrac{c}{b} = 2 \\ ac - b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b & (1) \\ c = -2b & (2) \\ ac - b > 0. & (3) \end{cases}$$

Thay (1) và (2) vào (3), ta được

$$-2b^2 - b > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < b < 0.$$

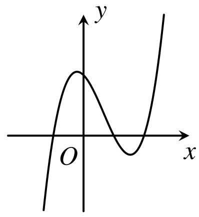
Từ $b < 0 \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ c > 0. \end{cases}$

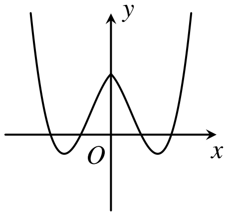
Vậy, trong các số a, b và c chỉ có một số dương là c.

Chọn phương án **B.** □

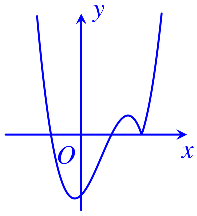
2. Đồ thị của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

1.105 (Đề tham khảo 2017). Hàm số $y = (x-2)\left(x^2-1\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = |x-2|\left(x^2-1\right)$?

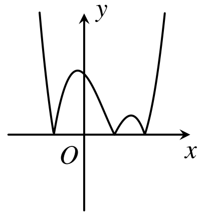




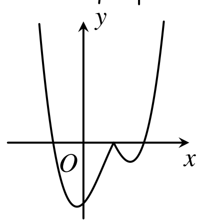
A.



B.



C.



D.

Lời giải.

Ta có $y(0) = -2$ nên loại phương án C và D.

Ta có $|x-2|\left(x^2-1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$.

Từ đó suy ra hai đồ thị ở phương án A và B chỉ khác nhau trên khoảng $(1; 2)$.

Lại có $y\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{5}{8} > 0$ nên loại phương án B.

Chọn phương án **B.** □

1.106 (Đề tham khảo 2018). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số

$$y = \left|3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m\right|$$

có 7 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	0	$\searrow$	32	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra hàm số $|f(x)+m|$ có 7 cực trị khi đường thẳng $y=-m$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 4 điểm phân biệt.
Từ bảng biến thiên ta có $-5<-m<0 \Leftrightarrow 0<m<5$.
Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn phương án **C.** □

3. Điểm thuộc đồ thị, tính chất đồ thị

1.107 (Đề chính thức 2018). Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C). Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C), đoạn thẳng AB có độ dài bằng

A. $\sqrt{6}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 2.

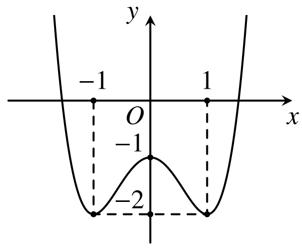
Lời giải.
Dễ thấy $I(-2;1)$.
Ta có $A\in(C)\Rightarrow A\left(a;\dfrac{a-1}{a+2}\right)\Rightarrow \overrightarrow{IA}=\left(a+2;-\dfrac{3}{a+2}\right)\Rightarrow IA=\sqrt{(a+2)^2+\dfrac{9}{(a+2)^2}}$.
Tương tự $B\in(C)\Rightarrow B\left(b;\dfrac{b-1}{b+2}\right)\Rightarrow \overrightarrow{IB}=\left(b+2;-\dfrac{3}{b+2}\right)\Rightarrow IB=\sqrt{(b+2)^2+\dfrac{9}{(b+2)^2}}$.
Khi đó $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=IA\cdot IB\cdot\cos 60^\circ \Leftrightarrow (a+2)(b+2)+\dfrac{9}{(a+2)(b+2)}=\dfrac{1}{2}AB^2$. (1)
Từ (1), và vì $\dfrac{1}{2}AB^2>0\Rightarrow (a+2)(b+2)>0$. (2)
Lại có

$$\begin{aligned}
IA=IB &\Leftrightarrow (a+2)^2+\frac{9}{(a+2)^2}=(b+2)^2+\frac{9}{(b+2)^2}\\
&\Leftrightarrow \left[(a+2)^2-(b+2)^2\right]\left[1-\frac{9}{(a+2)^2(b+2)^2}\right]=0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \quad (\text{loại vì } A\not\equiv B)\\ a+2=-(b+2) \quad (\text{loại do (2)})\\ (a+2)(b+2)=-3 \quad (\text{loại do (2)})\\ (a+2)(b+2)=3. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Với $(a+2)(b+2)=3$ thay vào (1) ta có $AB^2=12\Leftrightarrow AB=2\sqrt{3}$.
Chọn phương án **B.** □

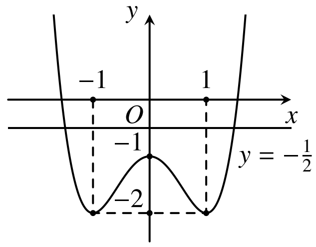
4. Xác định số nghiệm phương trình dựa vào bảng biến thiên hoặc đồ thị

1.108 (Đề chính thức 2020). Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=-\dfrac{1}{2}$ là



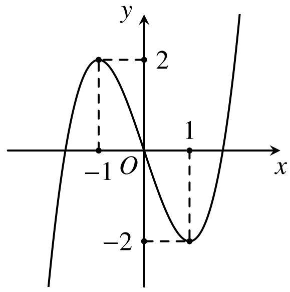
A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.
Số nghiệm phương trình $f(x)=-\dfrac{1}{2}$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-\dfrac{1}{2}$. Từ đồ thị suy ra phương trình $f(x)=-\dfrac{1}{2}$ có 3 nghiệm thực phân biệt.



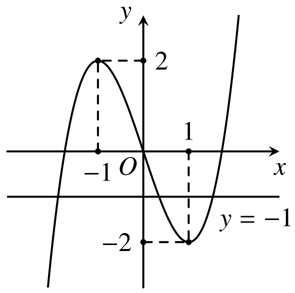
Chọn phương án **C.** □

1.109 (Đề chính thức 2020). Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = -1$ là



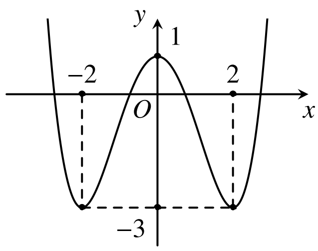
A. 1. **B**. 0. **C**. 3. **D**. 2.

Lời giải.
Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = -1$ là số giao điểm của đường thẳng $y = -1$ và đồ thị hàm số $y = f(x)$.
Dựa vào đồ thị, ta thấy đường thẳng $y = -1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt.
Vậy phương trình $f(x) = -1$ có 3 nghiệm thực phân biệt.



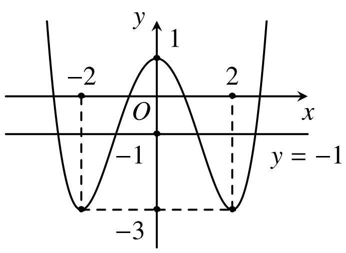
Chọn phương án **C.** □

1.110 (Đề tham khảo 2020). Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị trong hình bên. Số nghiệm của phương trình $f(x) = -1$ là



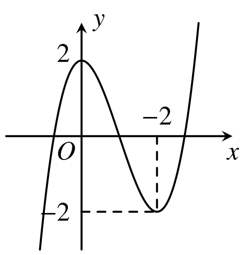
A. 1. **B**. 2. **C**. 4. **D**. 3.

Lời giải.
Số nghiệm của phương trình $f(x) = -1$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = -1$.
Dựa vào hình vẽ, suy ra số nghiệm của phương trình đã cho bằng 4.



Chọn phương án **C.** □

1.111 (Đề chính thức 2018). Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) + 4 = 0$ là



A. 2. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 0.

Lời giải.
Ta có $3f(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\dfrac{4}{3}$.
Dựa vào hình vẽ, ta thấy đường thẳng $y = -\dfrac{4}{3}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt.
Chọn phương án **C.** □

1.112 (Đề tham khảo 2019). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

A. 3. **B**. 4. **C**. 1. **D**. 2.

Lời giải.

Ta có $2f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\dfrac{3}{2}$.

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -\dfrac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy số nghiệm thực của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là 4.

Chọn phương án **B**. □

1.113 (Đề tham khảo 2018). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Số nghiệm phương trình $f(x) - 2 = 0$ là

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

A. 3. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 0.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 2$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $f(x) - 2 = 0$ có 3 nghiệm.

Chọn phương án **A**. □

1.114 (Đề tham khảo 2020). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Số nghiệm của phương trình $3f(x) - 2 = 0$ là

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

A. 2. **B**. 1. **C**. 0. **D**. 3.

Lời giải.

Ta có $3f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{2}{3}$.

Từ bảng biến thiên, suy ra phương trình $f(x) = \dfrac{2}{3}$ có 3 nghiệm phân biệt.

Chọn phương án **D**. □

1.115 (Đề thử nghiệm 2017). Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-1 \;\Vert\; -\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

A. $(-1; 2)$. **B**. $[-1; 2]$.
C. $(-1; 2]$. **D**. $(-\infty; 2]$.

Lời giải.

Số nghiệm của phương trình $f(x) = m$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m$. Do đó từ bảng biến thiên suy ra phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-1 < m < 2$.

Chọn phương án **A**. □

1.116 (Đề chính thức 2019). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Lời giải.

Ta có $2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{2}$. Từ bảng biến thiên, dễ thấy đường thẳng $y = \frac{3}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 4 điểm phân biệt. Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.
Chọn phương án **A.** □

5. Sự tương giao của hai đồ thị

1.117 (Đề tham khảo 2020). Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ và trục hoành là

A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Lời giải.

C1: Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - 3x + 1 = 0$.
Dùng máy tính giải phương trình trên được 3 nghiệm phân biệt.
Vậy số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ và trục hoành là 3.

C2: Ta có $y' = 3x^3 - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Chọn phương án **D.** □

1.118 (Đề tham khảo 2017). Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C). Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.

A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3}. \end{array}\right.$

Do đó số giao điểm của (C) và Ox là 3.
Chọn phương án **A.** □

1.119 (Đề chính thức 2020). Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 6x$ với trục hoành là

A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $-x^3 + 6x = 0 \Leftrightarrow -x\left(x^2 - 6\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{6}. \end{array}\right.$

Vậy đồ thị hàm số $y = -x^3 + 6x$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.
Chọn phương án **D.** □

1.120 (Đề thử nghiệm 2017). Đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ và đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 4$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

A. 2. B. 1. C. 4. D. 0.

Lời giải.
Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^4 - 2x^2 + 2 = -x^2 + 4 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Do đó hai đồ thị đã cho có 2 điểm chung.
Chọn phương án **A.** □

1.121 (Đề chính thức 2020). Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2$ và đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 3x$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải.
Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 + 3x^2 = 3x^2 + 3x \Leftrightarrow x\left(x^2 - 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Phương trình trên có 3 nghiệm phân biệt, do đó hai đồ thị đã cho có 3 giao điểm.
Chọn phương án **A.** □

1.122 (Đề minh họa 2016). Biết rằng đường thẳng $y = -2x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0.

A. $y_0 = 4$. **B.** $y_0 = 2$. **C.** $y_0 = 0$. **D.** $y_0 = -1$.

Lời giải.
Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 + x + 2 = -2x + 2 \Leftrightarrow x = 0$. Khi đó $y_0 = y(0) = 2$.
Chọn phương án **B.** □

1.123 (Đề chính thức 2017). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = mx - m + 1$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$ tại ba điểm A, B, C phân biệt sao cho $AB = BC$.

A. $m \in \left(-\dfrac{5}{4}; +\infty\right)$. **B.** $m \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.

C. $m \in \mathbb{R}$. **D.** $m \in (-2; +\infty)$.

Lời giải.
Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - 3x^2 + x + 2 = mx - m + 1 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - m - 1) = 0$.
Đặt $(C)\colon\ y = x^2 - 3x^2 + x + 2$, $d\colon\ y = mx - m + 1$ và $f(x) = x^2 - 2x - m - 1$ có $\Delta' = m + 2$.
Đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại ba điểm phân biệt khi $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2$.
Khi đó đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại ba điểm $A(x_1; mx_1 - m + 1), B(1; 1), C(x_2; mx_2 - m + 1)$.
Trong đó x_1, x_2 là hai nghiệm của $f(x)$ nên $x_A + x_C = x_1 + x_2 = 2 = 2x_B$.
Suy ra B là trung điểm AC hay $AB = BC$.
Chọn phương án **D.** □

1.124 (Đề chính thức 2019). Cho hai hàm số $y = \dfrac{x-3}{x-2} + \dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1}$ và $y = |x+2| - x + m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại 4 điểm phân biệt là

A. $[2; +\infty)$. **B.** $(-\infty; 2)$. **C.** $(2; +\infty)$. **D.** $(-\infty; 2]$.

Lời giải.
Phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là

$$\begin{aligned} & \frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} = |x+2| - x + m \\ \Leftrightarrow & \frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} - \sqrt{(x+2)^2} + x = m. \end{aligned} \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x-3}{x-2} + \dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} - \sqrt{(x+2)^2} + x$ trên $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1, 2\}$, ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{x+2}{|x+2|} + 1 \\ &= \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{|x+2| - (x+2)}{|x+2|}. \end{aligned}$$

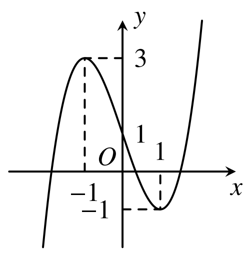
Vì $|x+2| \geqslant x+2$ với mọi số thực x, do đó $f'(x) > 0, \forall x \in \mathscr{D} \setminus \{-2\}$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	2

Từ bảng biến thiên, ta thấy phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \geqslant 2$. Vậy, với $m \geqslant 2$ thì hai đồ thị (C_1) và (C_2) cắt nhau tại 4 điểm phân biệt.
Chọn phương án **A.** □

6. Tương giao của hàm số hợp

1.125 (Đề tham khảo 2019). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sin x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ là



A. $[-1; 1)$. **B**. $(-1; 1)$. **C**. $(-1; 3)$. **D**. $[-1; 3)$.

Lời giải.
Đặt $\sin x = t$, phương trình trở thành $f(t) = m$. Với $x \in (0; \pi)$, ta có $t \in (0; 1]$.
Do đó yêu cầu bài toán trở thành $f(t) = m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $(0; 1]$.
Từ đồ thị ta suy ra điều kiện của tham số m là $m \in [-1; 1)$.
Chọn phương án **A.** □

1.126 (Đề tham khảo 2020). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \dfrac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\sin x) = 1$ là

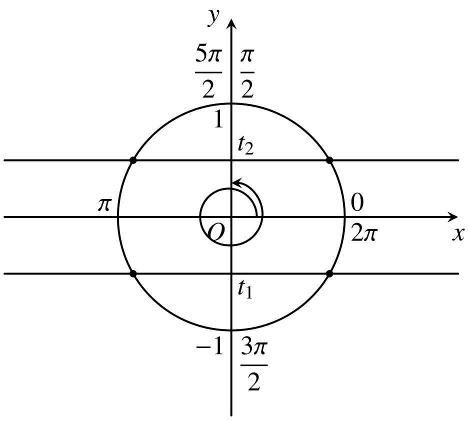
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

A. 4. **B**. 6. **C**. 7. **D**. 5.

Lời giải.
Đặt $\sin x = t \in [-1; 1]$, phương trình trở thành $f(t) = 1$. (1)

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$ ($y = 1$)

Dựa vào bảng biến thiên, xét trên $[-1; 1]$, ta có (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = t_1 \in (-1; 0) \\ t = t_2 \in (0; 1). \end{array}\right.$



Từ đường tròn lượng giác, suy ra

- Nghiệm $t_1 \in (-1; 0)$ tương ứng với 2 giá trị $x \in (\pi; 2\pi)$.
- Nghiệm $t_2 \in (0; 1)$ tương ứng với 2 giá trị $x \in (0; \pi)$ và 1 giá trị $x \in \left(2\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right)$.

Vậy, phương trình đã cho có 5 nghiệm phân biệt.
Chọn phương án **D.** □

1.127 (Đề tham khảo 2020). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$ của phương trình $2f(\sin x) + 3 = 0$ là

A. 3. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.

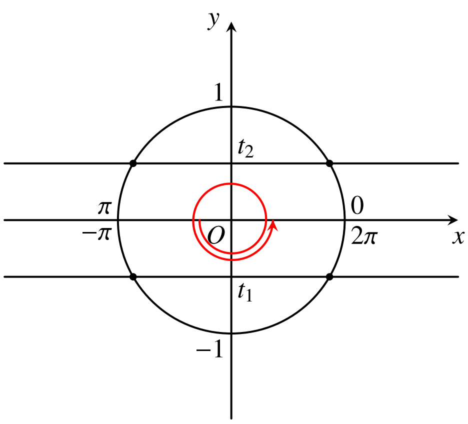
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

Lời giải.
Đặt $\sin x = t \in [-1; 1]$, phương trình trở thành $f(t) = -\dfrac{3}{2}$. (1)

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

$y = -\frac{3}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, xét trên $[-1; 1]$, ta có (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = t_1 \in (-1; 0) \\ t = t_2 \in (0; 1). \end{array}\right.$



Từ đường tròn lượng giác, suy ra

- Nghiệm $t_1 \in (-1; 0)$ tương ứng với 2 giá trị $x \in (-\pi; 0)$ và 2 giá trị $x \in (\pi; 2\pi)$.

- Nghiệm $t_2 \in (0; 1)$ tương ứng với 2 giá trị $x \in (0; \pi)$.

Vậy, phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt.
Chọn phương án **B.** □

1.128 (Đề chính thức 2020). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $5f\left(x^2 - 4x\right) = m$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$?

A. 24. **B.** 20. **C.** 25. **D.** 21.

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Lời giải.
Xét $g(x) = 5f\left(x^2 - 4x\right)$ trên $(0; +\infty)$ có $g'(x) = 5(2x - 4)f'\left(x^2 - 4x\right)$.

Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 4 = 0 \\ f'\left(x^2 - 4x\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^2 - 4x = -4 \\ x^2 - 4x = -2 \\ x^2 - 4x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 2 \pm \sqrt{2} \\ x = 0 \\ x = 4. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		$2-\sqrt{2}$		2		$2+\sqrt{2}$		4		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-15	$\nearrow$	10	$\searrow$	-10	$\nearrow$	10	$\searrow$	-15	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có ít nhất 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -15 < m \leqslant 10$.
Vậy có 25 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn phương án **C.** □

1.129 (Đề chính thức 2019). Cho hàm số $y = f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x^2 - 2x\right)$ là

A. 3. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 9.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Lời giải.
Ta có $y' = (2x - 2)f'\left(x^2 - 2x\right)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ f'\left(x^2 - 2x\right) = 0 \end{array}\right.$. Từ bảng biến thiên, ta thấy

$$f'\left(x^2 - 2x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 - 2x = a \in (-\infty; -1) & (1) \\ x^2 - 2x = b \in (-1; 0) & (2) \\ x^2 - 2x = c \in (0; 1) & (3) \\ x^2 - 2x = d \in (1; +\infty). & (4) \end{array}\right.$$

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 2x$ trên $\mathbb{R}$ có $g'(x) = 2x - 2$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

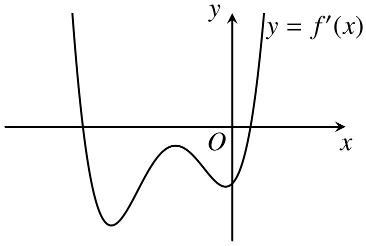
Từ bảng biến thiên, ta thấy

- Phương trình (1) vô nghiệm;
- Các phương trình (2), (3) và (4) có hai nghiệm phân biệt khác nhau và đôi một khác 1.

Như vậy, y' có 7 nghiệm đơn phân biệt nên hàm số $y = f\left(x^2 - 2x\right)$ có 7 điểm cực trị.
Chọn phương án **B.** □

1.130 (Đề chính thức 2020). Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 0$. Biết $y = f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \left|f\left(x^3\right) - x\right|$ là

A. 6. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.



Lời giải.
Xét $h(x) = f\left(x^3\right) - x$ trên $\mathbb{R}$ có $h'(x) = 3x^2 f'\left(x^3\right) - 1$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'\left(x^3\right) = \dfrac{1}{3x^2}$. (1)

Đặt $x^3 = t$, phương trình (1) trở thành $f'(t) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$. (2)

Xét $k(t) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$ trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; $k'(t) = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{t^5}}$.
Bảng biến thiên

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$k'(t)$		$+$	||	$-$	
$k(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

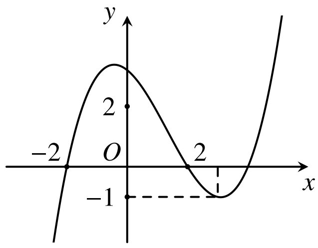
Từ bảng biến thiên của $k(t)$ và đồ thị của $f'(t)$, suy ra (2) có hai nghiệm trái dấu.
Từ đó suy ra (1) có hai nghiệm trái dấu, giả sử x_1 và x_2 $(x_1 < 0 < x_2)$.
Lại có $h(0) = f(0) - 0 = 0$, suy ra bảng biến thiên của $h(x)$ như sau

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$h(x_1)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$h(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

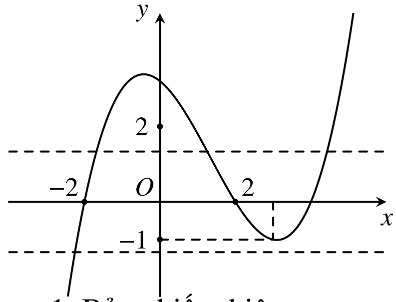
Từ bảng biến thiên, suy ra $g(x) = |h(x)|$ có 5 điểm cực trị.
Chọn phương án **C.** □

1.131 (Đề chính thức 2019). Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3 - 3x\right)\right| = \dfrac{4}{3}$ là

A. 4. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 3.



Lời giải.



Ta có $\left|f\left(x^3-3x\right)\right| = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow f\left(x^3-3x\right) = \pm\dfrac{4}{3}$. Từ đồ thị, suy ra

- $f\left(x^3-3x\right) = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-3x = a \in (-2;0) \\ x^3-3x = b \in (0;2) \\ x^3-3x = c \in (2;+\infty); \end{array}\right.$
- $f\left(x^3-3x\right) = -\dfrac{4}{3} \Leftrightarrow x^3-3x = d \in (-\infty;-2)$.

Xét hàm số $g(x) = x^3-3x$ trên $\mathbb{R}$ có $g'(x) = 3x^2-3$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

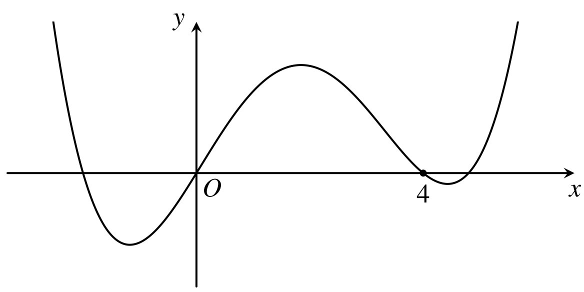
Từ bảng biến thiên, ta thấy

- Phương trình $x^3-3x = a \in (-2;0)$ có 3 nghiệm phân biệt;
- Phương trình $x^3-3x = b \in (0;2)$ có 3 nghiệm phân biệt;
- Phương trình $x^3-3x = c \in (2;+\infty)$ có 1 nghiệm;
- Phương trình $x^3-3x = d \in (-\infty;-2)$ có 1 nghiệm.

Vậy, phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right| = \dfrac{4}{3}$ có 8 nghiệm phân biệt.
Chọn phương án **C**. □

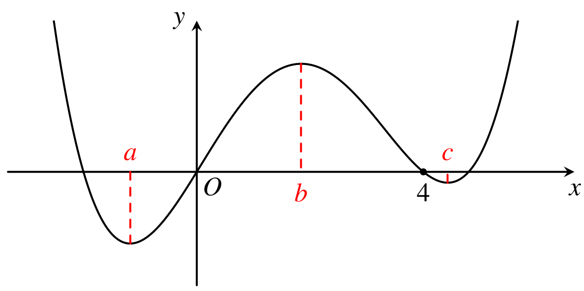
1.132 (Đề tham khảo 2020). Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(x^3+3x^2\right)$ là

A. 11. **B**. 5. **C**. 3. **D**. 7.



Lời giải.

Ta có $g'(x) = \left(3x^2+6x\right) f'\left(x^3+3x^2\right)$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ f'\left(x^3+3x^2\right) = 0. \end{array}\right.$.



Từ hình vẽ, suy ra $f'\left(x^3+3x^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3+3x^2 = a \in (-\infty;0) & (1) \\ x^3+3x^2 = b \in (0;4) & (2) \\ x^3+3x^2 = c \in (4;+\infty). & (3) \end{array}\right.$

Xét hàm số $h(x) = x^3+3x^2$ trên $\mathbb{R}$ có $h'(x) = 3x^2+6x$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

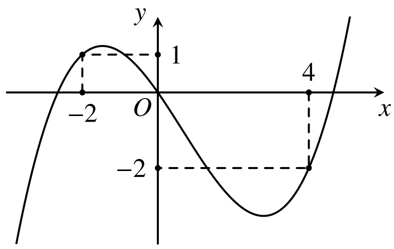
Từ bảng biến thiên, suy ra

- Phương trình (1) có đúng 1 nghiệm $x_1 < -2$;
- Phương trình (2) có đúng 3 nghiệm x_2, x_3, x_4 thỏa $x_1 < x_2 < -2 < x_3 < 0 < x_4$;
- Phương trình (3) có đúng 1 nghiệm $x_5 > x_4$.

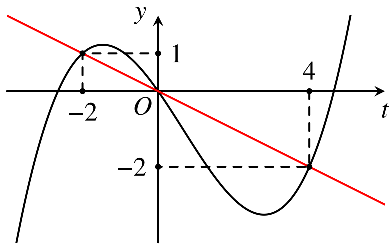
Vậy $g'(x)$ có 7 nghiệm đơn phân biệt nên hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị.
Chọn phương án **D.** □

1.133 (Đề tham khảo 2020). Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $g(x) = f(1-2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2; 3)$. **B**. $(-2; -1)$. **C**. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. **D**. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.



Lời giải.
Ta có $g'(x) = -2f'(1-2x) + 2x - 1$.
Đặt $t = 1 - 2x$, ta có $g'(x) = -2f'(t) - t = -2\left(f'(t) - \frac{-t}{2}\right)$.
Đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = -\frac{t}{2}$ như hình sau:



Từ hình vẽ ta có $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(t) > -\frac{t}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < t < 0 \\ t > 4. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < 1 - 2x < 0 \\ 1 - 2x > 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \\ x < -\frac{3}{2}. \end{array}\right.$

Từ đó suy ra hàm số $g(x)$ nghịch trên $\left(1; \frac{3}{2}\right) \subset \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.
Chọn phương án **D.** □

1.134 (Đề chính thức 2020). Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^4\left[f(x+1)\right]^2$ là

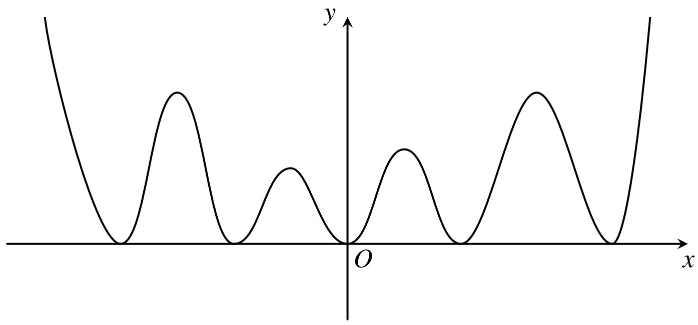
A. 5. **B**. 11. **C**. 9. **D**. 7.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Lời giải.

C1: Ta có $g(x) = \left[x^2 f(x+1)\right]^2$.
Từ bảng biến thiên suy ra $f(x+1)$ có 4 nghiệm phân biệt khác 0. Do đó $g(x)$ có 4 nghiệm kép phân biệt khác 0 và nghiệm bội bốn bằng 0.

Lại có $g'(x) = 2x^3 f(x+1)\left[2f(x+1) + xf'(x+1)\right]$, mà $f(x+1)\left[2f(x+1) + xf'(x+1)\right]$ là hàm số bậc tám có nhiều nhất 8 nghiệm nên $g'(x)$ có nhiều nhất 9 nghiệm. Ta suy ra đồ thị của $g(x)$ có dạng như sau:

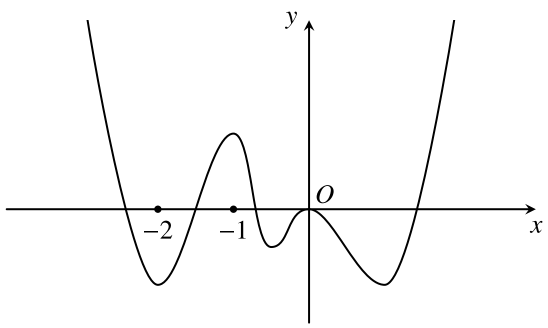


Từ đồ thị, suy ra hàm số $g(x)$ có 9 điểm cực trị.

C2: Ta có $g(x) = \left[x^2 f(x+1)\right)]^2 = [h(x)]^2$; $g'(x) = 2h(x)\cdot h'(x)$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h(x) = 0 \\ h'(x) = 0. \end{array}\right.$

Từ bảng biến thiên, suy ra $h(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \quad \text{(nghiệm kép)} \\ x = a < -2 \\ x = b \in (-2;-1) \\ x = c \in (-1;0) \\ x = d > 0. \end{array}\right.$

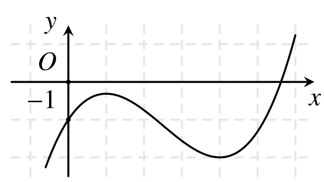
Ta có $h'(x) = 2xf(x+1) + x^2 f'(x+1)$ là hàm số bậc năm nên có nhiều nhất 5 nghiệm. Từ đó suy ra đồ thị của $h(x)$ như sau:



Từ hình vẽ, suy ra $h'(x)$ có nghiệm đơn bằng 0 và 4 nghiệm phân biệt còn lại không thuộc tập $\{0, a, b, c, d\}$.
Do đó $g'(x)$ có 8 nghiệm đơn phân biệt khác 0 và có nghiệm bội ba bằng 0.
Vậy $g(x)$ có 9 điểm cực trị.

Chọn phương án **C**. □

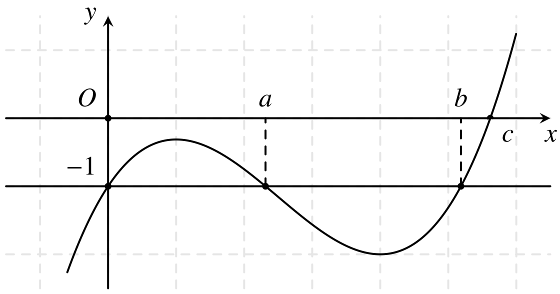
1.135 (Đề chính thức 2020). Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(x^3 f(x)) + 1 = 0$ là



A. 6. **B**. 4. **C**. 8. **D**. 5.

Lời giải.

Từ đồ thị (C) của hàm số $f(x)$, ta suy ra



- Phương trình $f(x) = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = a > 0 \\ x = b > a. \end{array}\right.$
- Phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = c > b$.

Do đó, ta có

$$f(x^3 f(x)) + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3 f(x) = 0 & (1) \\ x^3 f(x) = a & (2) \\ x^3 f(x) = b. & (3) \end{array}\right.$$

Khi đó

- Phương trình (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f(x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = c. \end{array}\right.$
- Phương trình (2) $\Leftrightarrow f(x) = \dfrac{a}{x^3}$. Số nghiệm của phương trình (2) bằng số giao điểm của đồ thị (C) với đồ thị (C_1): $g(x) = \dfrac{a}{x^3}$.

  Với $a > 0$ ta có $g'(x) = -\dfrac{3a}{x^4} < 0,\ \forall x \neq 0$.

  Từ đó suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(x) = \dfrac{a}{x^3}$ là

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	||	$-$	
$g(x)$	0 $\searrow$	$-\infty$	||	$+\infty$ $\searrow$	0

  Từ bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ và đồ thị (C), ta suy ra

  * Trên khoảng $(-\infty; 0)$, ta thấy

x	$-\infty$		0
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ ||
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1

    Suy ra phương trình (2) có đúng 1 nghiệm $x = x_1 \in (-\infty; 0)$.

  * Trên khoảng $(0; c)$, ta thấy $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ nên phương trình (2) vô nghiệm.
  * Trên nửa khoảng $[c; +\infty)$, ta thấy

x	c		$+\infty$
$g(x)$	$\dfrac{a}{c^3}$	$\searrow$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra phương trình (2) có đúng 1 nghiệm $x = x_2 \in (c; +\infty)$.

Do đó, phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác các nghiệm của phương trình (1).

- Phương trình (3) $\Leftrightarrow f(x) = \dfrac{b}{x^3}$.
  Tương tự như trên, ta có phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt khác các nghiệm của phương trình (1) và (2).

Vậy phương trình $f(x^3 f(x)) + 1 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt.
Chọn phương án **A.** □

7. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

1.136 (Đề chính thức 2018). Cho hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{7}{2}x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 6(x_1 - x_2)$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải.

Tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán có hệ số góc $k = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 6$.

Ta có $y' = x^3 - 7x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{7} \end{array}\right.$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{7}$		0		$\sqrt{7}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{49}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{49}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Lại có $y'(x_0) = k \Leftrightarrow x_0^3 - 7x_0 = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -2 \\ x_0 = -1 \\ x_0 = 3. \end{array}\right.$

Từ bảng biến thiên và yêu cầu bài toán suy ra $x_0 = 3$ không thỏa mãn.
Vậy có hai điểm A thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn phương án **C.** □

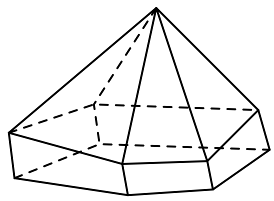
Chuyên đề 2

Khối Đa Diện

§1. Khối Đa Diện Và Thể Tích Của Khối Đa Diện

1. Xác định số đỉnh, cạnh, mặt của khối đa diện

2.1 (Đề tham khảo 2017). Hình đa diện trong hình vẽ bên có bao nhiêu mặt?

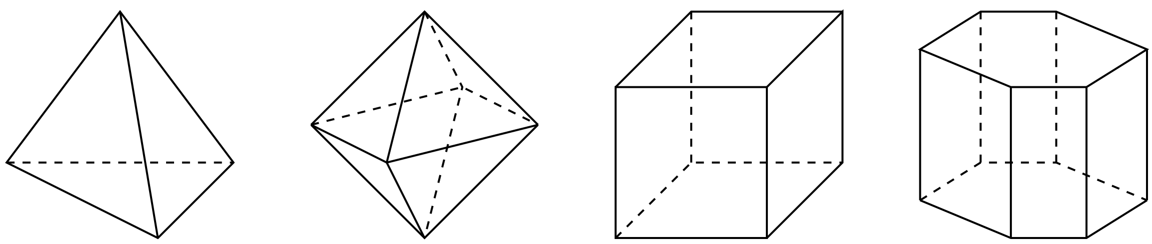


A. 12. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 6.

Lời giải.
Đếm số mặt ta thấy hình đa diện trong hình vẽ có 11 mặt.
Chọn phương án **B.** □

2. Tính chất đối xứng

2.2 (Đề thử nghiệm 2017). Hình đa diện nào dưới đây không có tâm đối xứng?



A. Tứ diện đều. **B.** Bát diện đều.
C. Hình lập phương. **D.** Lăng trụ lục giác đều.

Lời giải.
Hình tứ diện đều không có tâm đối xứng.
Chọn phương án **A.** □

2.3 (Đề chính thức 2017). Hình hộp chữ nhật có ba kích thước đôi một khác nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?
A. 9 mặt phẳng. **B.** 4 mặt phẳng. **C.** 3 mặt phẳng. **D.** 6 mặt phẳng.

Lời giải.
Hình hộp chữ nhật có ba kích thước khác nhau có 3 mặt phẳng đối xứng.
Chọn phương án **C.** □

§2. Thể Tích Khối Chóp

1. Công thức, lý thuyết

2.4 (Đề tham khảo 2018). Thể tích của khối chóp có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B là

A. $V = \frac{1}{6}Bh$. **B.** $V = Bh$. **C.** $V = \frac{1}{3}Bh$. **D.** $V = \frac{1}{2}Bh$.

Lời giải.

Công thức tính thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}Bh$.

Chọn phương án **C.** □

2.5 (Đề tham khảo 2020). Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 3$ và chiều cao $h = 4$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. 4. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 36.

Lời giải.

Từ công thức tính thể tích khối chóp $V = \frac{1}{3}Bh$, ta có $V = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4 = 4$.

Chọn phương án **A.** □

2.6 (Đề chính thức 2020). Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 2a^2$ và chiều cao $h = 6a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $6a^3$. **B.** $12a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** $4a^3$.

Lời giải.

Thể tích của khối chóp đã cho là $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3} \cdot 2a^2 \cdot 6a = 4a^3$.

Chọn phương án **D.** □

2.7 (Đề chính thức 2020). Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 6$ và chiều cao $h = 2$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. 12. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Thể tích của khối chóp đã cho là $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 2 = 4$.

Chọn phương án **D.** □

2.8 (Đề chính thức 2018). Cho khối chóp có đáy hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $2a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $4a^3$. **B.** $\frac{2}{3}a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** $\frac{4}{3}a^3$.

Lời giải.

Diện tích đáy của khối chóp là $S = a^2$.

Vậy, thể tích của khối chóp là $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}a^2 \cdot 2a = \frac{2}{3}a^3$.

Chọn phương án **B.** □

2.9 (Đề thử nghiệm 2017). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$ và thể tích bằng a^3. Tính chiều cao h của hình chóp đã cho.

A. $h = \frac{\sqrt{3}a}{3}$. **B.** $h = \sqrt{3}a$. **C.** $h = \frac{\sqrt{3}a}{2}$. **D.** $h = \frac{\sqrt{3}a}{6}$.

Lời giải.

Diện tích đáy là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a^2\sqrt{3}$.

Do đó chiều cao của hình chóp là $h = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{3a^3}{a^2\sqrt{3}} = a\sqrt{3}$.

Chọn phương án **B.** □

2. Khối chóp có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy

2.10 (Đề minh họa 2016). Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \sqrt{2}a^3$. **B.** $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{4}$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **D.** $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

Lời giải.

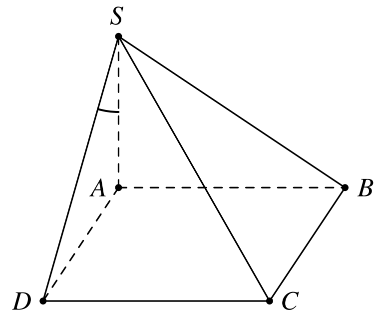
Diện tích đáy $S_{ABCD} = a^2$. Thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Chọn phương án **C.** □

2.11 (Đề tham khảo 2017). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy, SD tạo với mặt phẳng (SAB) một góc bằng $30°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{18}$. **B.** $V = \sqrt{3}a^3$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **D.** $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$.

Lời giải.



Diện tích dây là $S_{ABCD} = a^2$.

Ta có $\begin{cases} DA \perp SA \\ DA \perp BA \end{cases} \Rightarrow DA \perp (SAB)$.

Do đó góc giữa SD và (SAB) là $\widehat{DSA}$, suy ra $\widehat{DSA} = 30°$.

Trong tam giác SAD vuông tại A có $SA = \dfrac{AD}{\tan 30°} = a\sqrt{3}$.

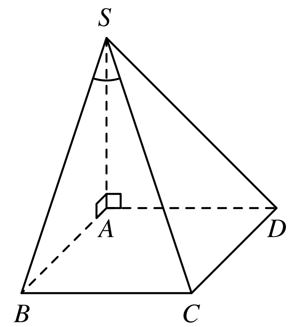
Vậy thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SA = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Chọn phương án **C.** □

2.12 (Đề chính thức 2017). Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc $30°$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$. **B.** $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **C.** $V = \dfrac{2a^3}{3}$. **D.** $V = \sqrt{2}a^3$.

Lời giải.



Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Suy ra SB là hình chiếu của SC trên (SAB).

Do đó $\widehat{CSB}$ là góc giữa SC và (SAB) hay $\widehat{CSB} = 30°$.

Trong tam giác SBC vuông tại B có $SB = \dfrac{BC}{\tan 30°} = a\sqrt{3}$.

Trong tam giác SAB vuông tại A có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Chọn phương án **B.** □

3. Khối chóp đều

2.13 (Đề tham khảo 2019). Cho khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng $2a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{8a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{8\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải.

Gọi khối chóp là $S.ABCD$, ta có diện tích đáy $S_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$.

Gọi O là tâm đáy, ta có $AC = 2\sqrt{2}a \Rightarrow AO = a\sqrt{2}$.

Do đó chiều cao $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = a\sqrt{2}$.

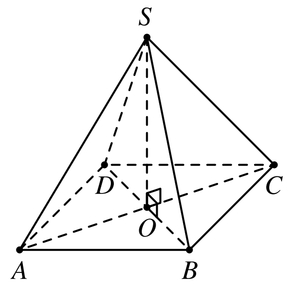
Vậy thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \dfrac{1}{3} \cdot 4a^2 \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}$.

Chọn phương án **A.** □

2.14 (Đề chính thức 2017). Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{2}$. **B.** $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{14}a^3}{2}$. **D.** $V = \dfrac{\sqrt{14}a^3}{6}$.

Lời giải.



Giả sử khối chóp tứ giác đều là $S.ABCD$ và gọi O là tâm của $ABCD$.

Theo giả thiết ta có $AB = a$, suy ra $S_{ABCD} = a^2$.

Lại có $AO = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $SA = 2AB = 2a$.

Suy ra $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Vậy thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{a^3\sqrt{14}}{6}$.

Chọn phương án **D.** □

4. Khối chóp khác

2.15 (Đề minh họa 2016). Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}a$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD).

A. $h = \frac{2}{3}a$. **B.** $h = \frac{3}{4}a$. **C.** $h = \frac{4}{3}a$. **D.** $h = \frac{8}{3}a$.

Lời giải.

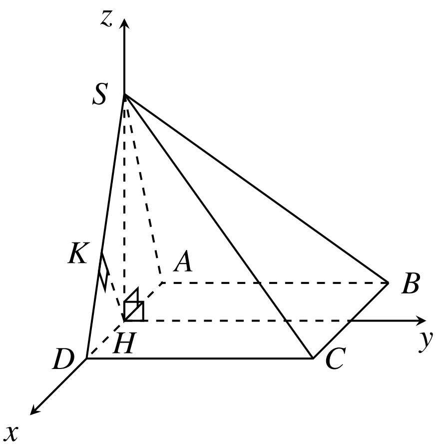
Diện tích đáy $S_{ABCD} = 2a^2$.

Gọi H trung điểm AD ta có $SH \perp (ABCD)$. Do đó $SH = \dfrac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}} = 2a$.

C1: Ta có $\mathrm{d}(B,(SCD)) = \mathrm{d}(A,(SCD)) = 2\mathrm{d}(H,(SCD))$.

Gọi K là hình chiếu của H trên SD, ta có

$$\begin{cases} HK \perp SD \\ HK \perp CD \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SCD) \text{ hay } HK = \mathrm{d}(H,(SCD)).$$



$$\text{Lại có } HK = \frac{HS \cdot HD}{SD} = \frac{2a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{4a^2 + \frac{2a^2}{4}}} = \frac{2a}{3}.$$

Vậy $\mathrm{d}(B,(SCD)) = 2HK = \frac{4a}{3}$.

C2: Đặt $a = 1$ và gắn hệ tọa độ như hình vẽ.

Ta có $H(0;0;0)$, $D\left(\frac{\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{2};0\right)$, $S(0;0;2)$, $B\left(\frac{-\sqrt{2}}{2};\sqrt{2};0\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{SC} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{2};-2\right)$, $\overrightarrow{SD} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2};0;-2\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right] = \left(-2\sqrt{2};0;-1\right)$.

Do đó mặt phẳng (SCD) có phương trình $-2\sqrt{2}x - z + 2 = 0$.

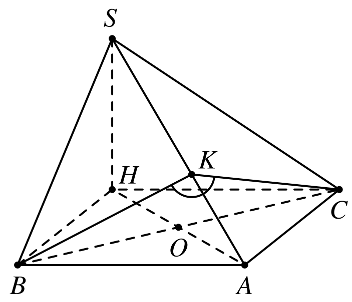
Vậy $\mathrm{d}(B,(SCD)) = \dfrac{|2+2|}{\sqrt{8+1}} = \dfrac{4}{3}$.

Chọn phương án **C.** □

2.16 (Đề tham khảo 2020). Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a$, $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90°$, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng $60°$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{a^3}{6}$. B. $\frac{a^3}{3}$. C. $\frac{a^3}{2}$. D. a^3.

Lời giải.



Diện tích đáy ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{a^2}{2}$.

Gọi H là hình chiếu của S trên (ABC), ta có $\begin{cases} AB \perp SB \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB \perp HB \\ AC \perp HC. \end{cases}$

Từ đó suy ra $ABCH$ là hình vuông cạnh a.

Gọi K là hình chiếu của B trên SA, ta có $\begin{cases} SA \perp BK \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (BKC)$.

Do đó góc giữa (SAB) và (SAC) bằng góc giữa BK và CK và bằng $60°$.

Gọi O là giao điểm của BC và AH, ta có $KO \perp BC$ và $KO \perp SA$.

<u>TH1</u>: $\widehat{BKC} = 60° \Rightarrow KO = \frac{1}{2}BC = OA$ (vô lý).

<u>TH2</u>: $\widehat{BKC} = 120° \Rightarrow KO = OB\tan 30° = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Lại có $\triangle SHA \backsim \triangle OKA \Rightarrow SH = \frac{OK \cdot HA}{KA} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{6} \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6}}} = a$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SH = \frac{a^3}{6}$.

Chọn phương án **A.** □

§3. Thể Tích Khối Lăng Trụ

1. Công thức, lý thuyết

2.17 (Đề chính thức 2019). Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là

A. Bh. B. $\frac{4}{3}Bh$. C. $\frac{1}{3}Bh$. D. $3Bh$.

Lời giải.

Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là $V = Bh$.

Chọn phương án **A.** □

2.18 (Đề tham khảo 2020). Thể tích của khối lập phương cạnh 2 bằng

A. 4. B. 8. C. 6. D. 2.

Lời giải.

Từ công thức tính thể tích khối lập phương $V = a^3$, ta có $V = 2^3 = 8$.

Chọn phương án **B.** □

2.19 (Đề tham khảo 2019). Thể tích của khối lập phương cạnh $2a$ bằng

A. $8a^3$. B. $6a^3$. C. $2a^3$. D. a^3.

Lời giải.

Thể tích của khối lập phương là $V = (2a)^3 = 8a^3$.
Chọn phương án **A.** □

2.20 (Đề tham khảo 2020). Cho khối lập phương có cạnh bằng 6. Thể tích của khối lập phương đã cho bằng

A. 18. **B.** 72. **C.** 216. **D.** 36.

Lời giải.
Thể tích khối lập phương đã cho bằng $6^3 = 216$.
Chọn phương án **C.** □

2.21 (Đề chính thức 2020). Cho khối hộp chữ nhật có ba kích thước 3; 4; 5. Thể tích của khối hộp đã cho bằng

A. 10. **B.** 60. **C.** 12. **D.** 20.

Lời giải.
Thể tích của khối hộp đã cho bằng $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.
Chọn phương án **B.** □

2.22 (Đề chính thức 2020). Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $B = 3$ và chiều cao $h = 6$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. 18. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải.
Thể tích của khối lăng trụ đã cho là $V = Bh = 3 \cdot 6 = 18$.
Chọn phương án **A.** □

2. Khối lăng trụ đứng

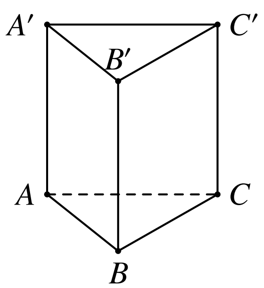
2.23 (Đề minh họa 2016). Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC' = a\sqrt{3}$.

A. $V = \frac{1}{3}a^3$. **B.** $V = \frac{3\sqrt{6}a^3}{4}$. **C.** $V = 3\sqrt{3}a^3$. **D.** $V = a^3$.

Lời giải.
Đặt $AB = x$, ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = x\sqrt{2}$. Suy ra $AC' = \sqrt{AA'^2 + AC^2} = x\sqrt{3}$.
Lại có $AC' = a\sqrt{3}$, suy ra $x = a$. Vậy thể tích khối lập phương $V = a^3$.
Chọn phương án **D.** □

2.24 (Đề chính thức 2019). Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA' = \sqrt{3}a$ (minh họa như hình vẽ bên). Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{a^3}{2}$. **B.** $\frac{a^3}{4}$. **C.** $\frac{3a^3}{2}$. **D.** $\frac{3a^3}{4}$.



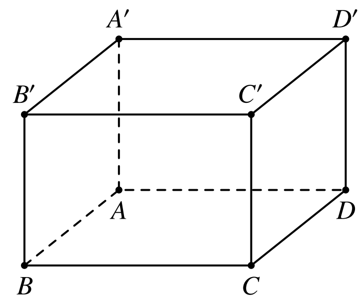
Lời giải.
Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Do đó thể tích của khối lăng trụ là

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3}a = \frac{3a^3}{4}.$$

Chọn phương án **D.** □

2.25 (Đề tham khảo 2020). Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $BD = a\sqrt{3}$ và $AA' = 4a$ (minh họa như hình bên). Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $2\sqrt{3}a^3$. **D.** $4\sqrt{3}a^3$.



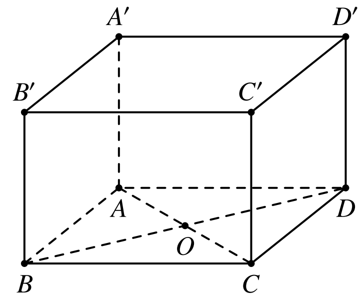
Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD, ta có $OB = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \dfrac{a}{2} \Rightarrow AC = 2OA = a$.

Khi đó diện tích đáy là $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BD = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy, thể tích khối lăng trụ là $V = S_{ABCD} \cdot AA' = 2a^3\sqrt{3}$.



Chọn phương án **C.** □

2.26 (Đề tham khảo 2017). Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.

Diện tích đáy $S = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; chiều cao $h = a$.

Do đó thể tích khối lăng trụ là $V = Bh = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Chọn phương án **C.** □

3. Khối lăng trụ xiên

2.27 (Đề chính thức 2018). Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Gọi E, F là hình chiếu của A trên BB' và CC'.

Ta có $\begin{cases} AE \perp AA' \\ AF \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AA' \perp (AEF) \Rightarrow BB' \perp EF$.

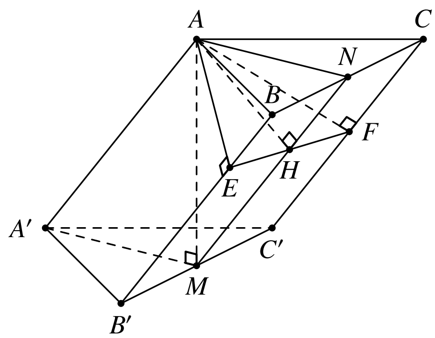
Từ đó suy ra $EF = \mathrm{d}(F, BB') = \mathrm{d}(C, BB') = 2 \Rightarrow \triangle AEF$ vuông tại A.

Gọi N trung điểm BC và $H = MN \cap EF$, ta có $AH = \dfrac{1}{2}EF = 1$.

Dễ thấy $\triangle AMN$ vuông tại A và có đường cao AH.

Do đó $\dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{AH^2} - \dfrac{1}{AN^2} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow AM = 2$.

Lại có $MN = \sqrt{AM^2 + AN^2} = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow S_{BCC'B'} = MN \cdot EF = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$.



Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{ABCC'} = \dfrac{3}{2}V_{A.BCC'B'} = \dfrac{1}{2}S_{BCC'B'} \cdot \mathrm{d}(A, EF) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{8}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2.$

Chọn phương án **D.** □

4. Bài toán thực tế về khối lăng trụ

2.28 (Đề chính thức 2018). Ông A dự định sử dụng hết 6,5 m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. 1,33 m^3. **B.** 1,50 m^3. **C.** 1,61 m^3. **D.** 2,26 m^3.

Lời giải.

Gọi x, h lần lượt là chiều rộng và chiều cao của bể cá $(x, h > 0)$.

Tổng diện tích không tính nắp của bể cá là $2x^2 + 2 \cdot xh + 2 \cdot 2xh = 2x^2 + 6xh$.

Theo giả thiết ta có $2x^2 + 6xh = 6{,}5 \Leftrightarrow h = \dfrac{6{,}5 - 2x^2}{6x}$.

Từ điều kiện $h > 0$, ta có $6{,}5 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

Khi đó dung tích bể cá là $V = x \cdot 2x \cdot h = \dfrac{13}{6}x - \dfrac{2}{3}x^3$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{13}{6}x - \dfrac{2}{3}x^3$ trên $\left(0; \dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{13}{6} - 2x^2$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{39}}{6}$. Bảng biến thiên

x	0		$\frac{\sqrt{39}}{6}$		$\frac{\sqrt{13}}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{13\sqrt{39}}{54}$	$\searrow$	0

Vậy bể cá có dung tích lớn nhất bằng $\dfrac{13\sqrt{39}}{54} \approx 1{,}50$ m^3.

Chọn phương án **B.** □

§4. Tỉ Số Thể Tích

1. Khối chóp

2.29 (Đề thử nghiệm 2017). Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm tam giác BCD. Tính thể tích V của khối chóp $A.GBC$.

A. $V = 3$. **B.** $V = 5$. **C.** $V = 4$. **D.** $V = 6$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}(G, BC) = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}(D, BC)$ nên $S_{\triangle GBC} = \dfrac{1}{3}S_{\triangle DBC}$. Từ đó suy ra $V_{A.GBC} = \dfrac{1}{3}V_{ADBC} = 4$.

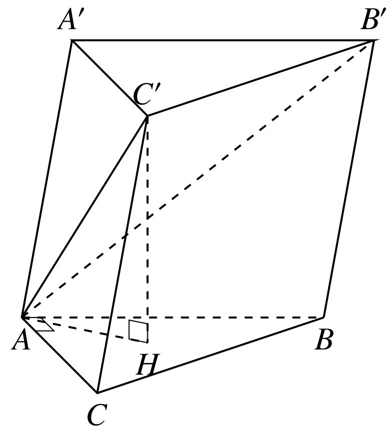
Chọn phương án **C.** □

2.30 (Đề thử nghiệm 2017). Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh $AC = 2\sqrt{2}$. Biết AC' tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° và $AC' = 4$. Tính thể tích V của khối đa diện $ABCB'C'$.

A. $V = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V = \dfrac{16}{3}$. **C.** $V = \dfrac{8}{3}$. **D.** $V = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $V_{ABCB'C'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.A'B'C'}$.
Ta có $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = 4$.
Gọi H là hình chiếu của C' trên (ABC).
Ta có góc giữa $C'A$ và (ABC) là $\widehat{C'AH} = 60^\circ$.
Trong tam giác $C'HA$ có $C'H = C'A.\sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$.
Suy ra $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC}.C'H = 8\sqrt{3}$.
Lại có $V_{A.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}.C'H = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.
Vậy $V_{ABCB'C'} = 8\sqrt{3} - \dfrac{8\sqrt{3}}{3} = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.



Chọn phương án **D**. □

2.31 (Đề minh họa 2016). Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB = 6a$, $AC = 7a$ và $AD = 4a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CD, DB. Tính thể tích V của tứ diện $AMNP$.

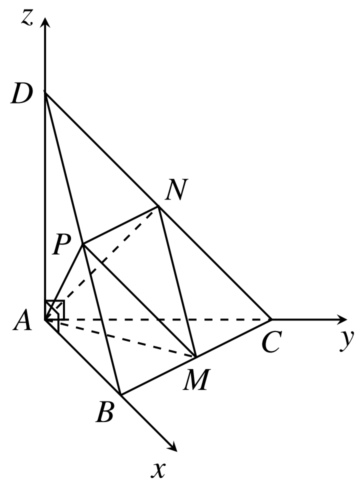
A. $V = \dfrac{7}{2}a^3$. **B.** $V = 7a^3$. **C.** $V = 14a^3$. **D.** $V = \dfrac{28}{3}a^3$.

Lời giải.

C1: Ta có $\dfrac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle BCD}} = \dfrac{\frac{1}{2}\mathrm{d}(N, MP)\cdot NP}{\frac{1}{2}\mathrm{d}(B, CD)\cdot CD} = \dfrac{1}{4}$.

Suy ra $\dfrac{V_{AMNP}}{V_{ABCD}} = \dfrac{\frac{1}{3}\mathrm{d}(A,(MNP))\cdot S_{\triangle MNP}}{\frac{1}{3}\mathrm{d}(A,(BCD))\cdot S_{\triangle BCD}} = \dfrac{1}{4}$.

Vậy $V_{AMNP} = \dfrac{1}{4}V_{ABCD} = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{6}AB\cdot AC\cdot AD = 7a^3$.



C2: Đặt $a = 1$ và gắn hệ tọa độ như hình vẽ.
Ta có $A(0;0;0)$, $B(6;0;0)$, $C(0;7;0)$, $D(0;0;4)$.
Suy ra $M\left(3;\dfrac{7}{2}\right)$, $N\left(0;\dfrac{7}{2};2\right)$, $P(3;0;2)$.
Khi đó $\overrightarrow{AM} = \left(3;\dfrac{7}{2}\right)$, $\overrightarrow{AN} = \left(0;\dfrac{7}{2};2\right)$, $\overrightarrow{AP} = (3;0;2)$.
Suy ra $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right] = \left(7;-6;\dfrac{21}{2}\right)$.
Vậy $V_{AMNP} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right]\cdot\overrightarrow{AP}\right| = 7$.

Chọn phương án **B**. □

2.32 (Đề tham khảo 2017). Cho khối tứ diện có thể tích V. Gọi V' là thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các trung điểm của các cạnh của khối tứ diện đã cho, tính tỉ số $\dfrac{V'}{V}$.

A. $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{5}{8}$.

Lời giải.

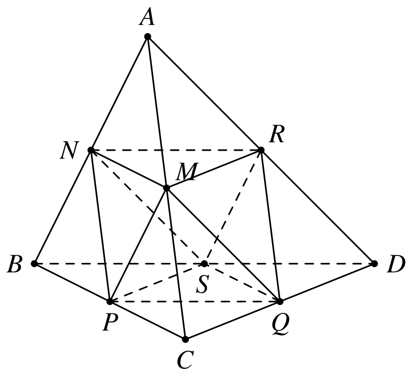
Gọi tứ diện là $ABCD$ và M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AC, AB, BC, CD, AD, BD.

Ta có $V' = V - \left(V_{A.MNR} + V_{B.NPS} + V_{C.MPQ} + V_{D.QRS}\right)$.

Trong đó $\dfrac{V_{A.MNR}}{V} = \dfrac{AM}{AC} \cdot \dfrac{AN}{AB} \cdot \dfrac{AR}{AD} = \dfrac{1}{8}$ hay $V_{A.MNR} = \dfrac{1}{8}V$.

Tương tự $V_{B.NPS} = V_{C.MPQ} = V_{D.QRS} = \dfrac{1}{8}V$.

Vậy $V' = V - 4.\dfrac{1}{8}V = \dfrac{1}{2}V$.

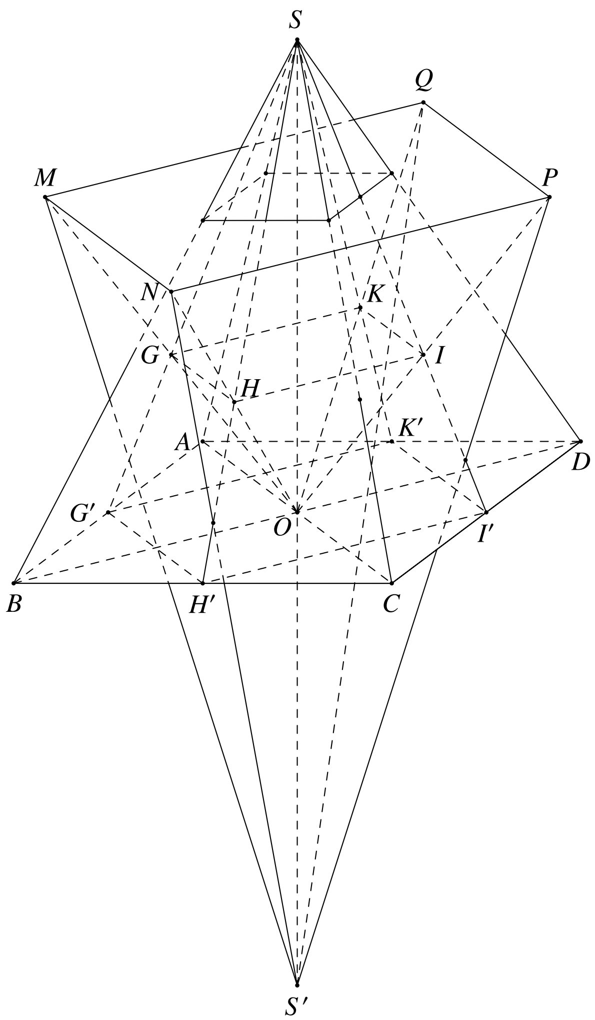


Chọn phương án **C**. □

2.33 (Đề chính thức 2020). Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O. Thể tích của khối chóp $S'.MNPQ$ bằng

A. $\dfrac{20\sqrt{14}a^3}{81}$. **B.** $\dfrac{40\sqrt{14}a^3}{81}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{14}a^3}{9}$. **D.** $\dfrac{10\sqrt{14}a^3}{81}$.

Lời giải.



Gọi G', H', I' và K' lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD và DA.

Ta có $S_{G'H'I'K'} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}a^2$.

Gọi G, H, I và K lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SBC, SCD và SDA.

Hai hình vuông $GHIK$ và $G'H'I'K'$ đồng dạng tỉ số bằng $\dfrac{2}{3}$ nên $S_{GHIK} = \dfrac{4}{9} \cdot S_{G'H'I'K'} = \dfrac{2}{9}a^2$.

Hai hình vuông $MNPQ$ và $GHIK$ đồng dạng tỉ số bằng 2 nên $S_{MNPQ} = 4 \cdot S_{GHIK} = \dfrac{8}{9}a^2$.

Tam giác SAO vuông tại O nên $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{2a^2}{4}} = \frac{\sqrt{14}}{2}a$.

Ta có $\mathrm{d}(O,(MNPQ)) = 2 \cdot \mathrm{d}(O,(GHIK)) = \frac{2}{3}SO \Rightarrow \mathrm{d}(S',(MNPQ)) = \frac{5}{3}SO = \frac{5\sqrt{14}}{6}a$.
Vậy thể tích khối chóp $S'.MNPQ$ là

$$V_{S.MNPQ} = \frac{1}{3} \cdot S_{MNPQ} \cdot \mathrm{d}(S',(MNPQ)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{9}a^2 \cdot \frac{5\sqrt{14}}{6}a = \frac{20\sqrt{14}a^3}{81}.$$

Chọn phương án **A.** □

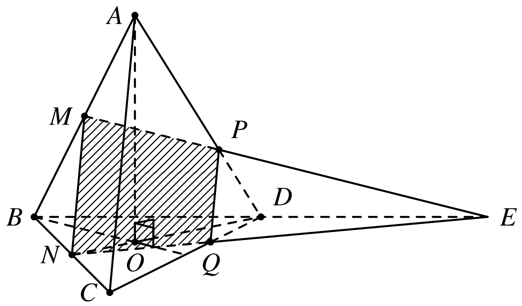
2.34 (Đề chính thức 2017). Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và E là điểm đối xứng với B qua D. Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V. Tính V.

A. $V = \frac{11\sqrt{2}a^3}{216}$. **B.** $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{18}$. **C.** $V = \frac{7\sqrt{2}a^3}{216}$. **D.** $V = \frac{13\sqrt{2}a^3}{216}$.

Lời giải.

Gọi O trọng tâm tam giác BCD có $BO = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Ta có $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}BC \cdot BD \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, suy ra $V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{\triangle BCD} \cdot AO = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.



Gọi $P = EM \cap AD$ và $Q = EN \cap CD$, ta có $AP = 2PD$ và $CQ = 2QD$.
Gọi V' là thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh A, ta có $V' = V_{M.BNE} - V_{P.DQE}$.
Khi đó $V = V_{ABCD} - V' = V_{ABCD} - V_{M.BNE} + V_{P.DQE}$.

Trong đó $S_{\triangle BNE} = \frac{1}{2}\mathrm{d}(N, BE).BE = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot 2a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Suy ra $V_{M.BNE} = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{d}(M,(BCE)) \cdot S_{\triangle BCE} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

Lại có $S_{\triangle DQE} = \frac{1}{2}\mathrm{d}(Q, DE) \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

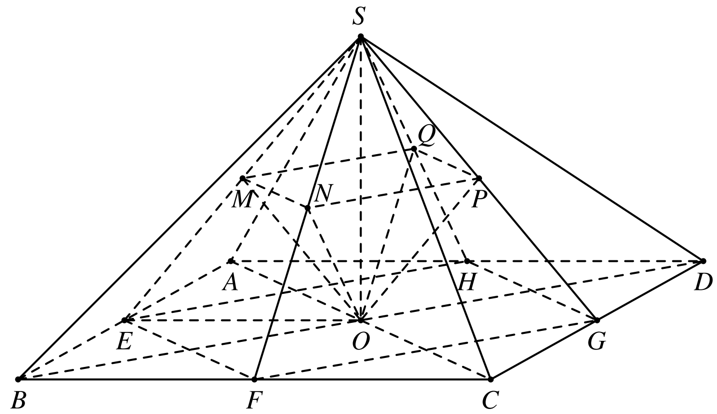
Suy ra $V_{P.DQE} = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{d}(P,(DQE)) \cdot S_{\triangle DQE} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{9} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{12} = \frac{a^3\sqrt{2}}{108}$.

Vậy $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} - \frac{a^3\sqrt{2}}{24} + \frac{a^3\sqrt{2}}{108} = \frac{11a^3\sqrt{2}}{216}$.
Chọn phương án **A.** □

2.35 (Đề chính thức 2020). Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $\frac{3\sqrt{3}a}{2}$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD) và (SDA). Thể tích khối chóp $O.MNPQ$ bằng

A. $\frac{2a^3}{3}$. **B.** $\frac{9a^3}{32}$. **C.** $\frac{9a^3}{16}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Lời giải.



Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = (3a)^2 = 9a^2$.

Ta có $AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 3a\sqrt{2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SAO vuông tại O có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{3a}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 9a^2 \cdot \frac{3a}{2} = \frac{9a^3}{2}$.

Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA.

Khi đó M, N, P, Q lần lượt là hình chiếu của O trên SE, SF, SG, SH.

Ta có $EO = \frac{1}{2}AD = \frac{3a}{2} = SO$, suy ra $\triangle SOE$ vuông cân tại O.

Do đó M trung điểm SE hay $\frac{SM}{SE} = \frac{1}{2}$, tương tự $\frac{SN}{SF} = \frac{SP}{SG} = \frac{SQ}{SH} = \frac{1}{2}$.

Khi đó $\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.EFGH}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{4}(2 + 2 + 2 + 2) = \frac{1}{8}$.

Suy ra $V_{S.MNPQ} = \frac{1}{8}V_{S.EFGH} = \frac{1}{16}V_{S.ABCD} = \frac{9a^3}{32}$.

Mặt khác $d(O, (MNPQ)) = d(S, (MNPQ))$, do đó $V_{O.MNPQ} = V_{S.MNPQ} = \frac{9a^3}{32}$.

Chọn phương án **B.** □

2. Khối lăng trụ

2.36 (Đề tham khảo 2019). Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AA' và BB'. Đường thẳng CM cắt đường thẳng $C'A'$ tại P, đường thẳng CN cắt đường thẳng $C'B'$ tại Q. Thể tích của khối đa diện lồi $A'MPB'NQ$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 1. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $V_{C.A'B'C'} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3}$.

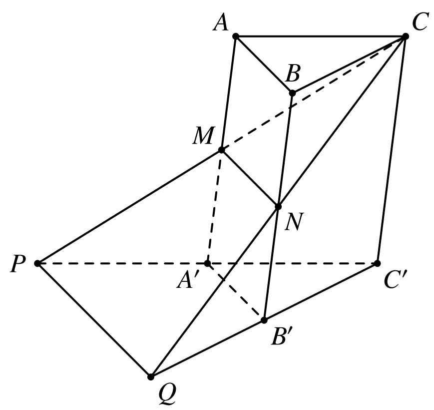
Suy ra $V_{C.ABB'A'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{C.A'B'C'} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Lại có $V_{C.ABNM} = \frac{1}{2}V_{C.ABB'A'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Từ đó suy ra $V_{CC'MNB'A'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{C.ABNM} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Mặt khác $S_{\triangle C'AP} = 4S_{\triangle C'A'B'} \Rightarrow V_{C.C'PQ} = 4V_{C.C'A'B'} = \frac{4}{3}$.

Vậy $V_{A'MPB'NQ} = V_{C.C'PQ} - V_{CC'MNB'A'} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.



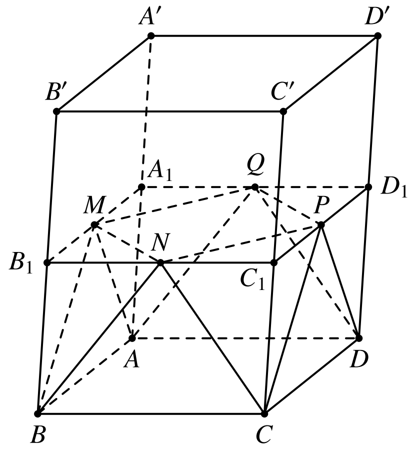
Chọn phương án **C.** □

2.37 (Đề tham khảo 2020). Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có chiều cao bằng 8 và diện tích đáy bằng 9. Gọi M, N, P và Q lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$ và $DAA'D'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, D, M, N, P và Q bằng

A. 36. **B.** 18. **C.** 27. **D.** 30.

Lời giải.

Giả sử mặt phẳng $(MNPQ)$ cắt các cạnh bên AA', BB', CC', DD' lần lượt tại A_1, B_1, C_1, D_1 và gọi V là thể tích khối đa diện cần tìm, ta có



$$\begin{aligned} V &= V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} - \left(V_{A.A_1MQ} + V_{B.B_1NM} + V_{C.C_1PN} + V_{D.D_1QP}\right) \\ &= V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} - 4\cdot\frac{1}{24}V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} \\ &= \frac{5}{6}V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = \frac{5}{12}V_{ABCD.A'B'C'D'} \\ &= \frac{5}{12}\cdot 9\cdot 8 = 30. \end{aligned}$$

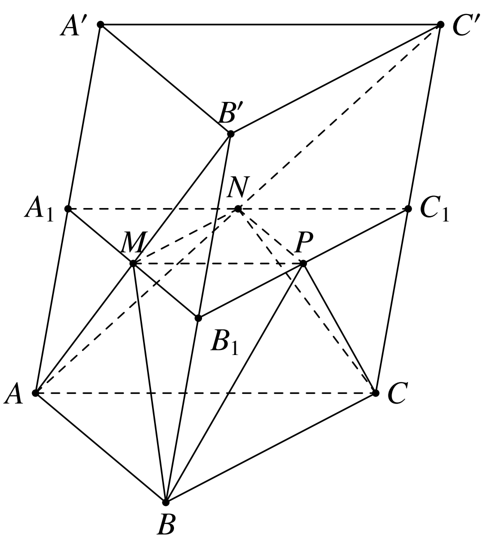
Chọn phương án **D.** □

2.38 (Đề chính thức 2019). Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 6. Gọi M, N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

A. $30\sqrt{3}$. **B.** $21\sqrt{3}$. **C.** $36\sqrt{3}$. **D.** $27\sqrt{3}$.

Lời giải.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \dfrac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$. Do đó thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = 9\sqrt{3}\cdot 8 = 72\sqrt{3}$. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của AA', BB', CC', ta có $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{V}{2}$ và $V_{A.A'B'C'} = \dfrac{V}{3}$. Khi đó $V_{A.A_1MN} = \dfrac{1}{8}V_{A.A'B'C'} = \dfrac{V}{24}$. Tương tự, ta tính được $V_{B.B_1MP} = V_{C.C_1NP} = \dfrac{V}{24}$. Như vậy,



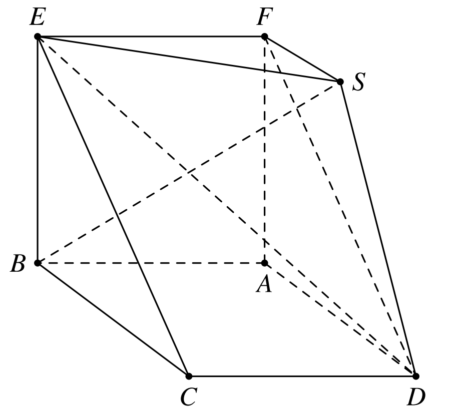
$$\begin{aligned} V_{ABCMNP} &= V_{ABC.A_1B_1C_1} - \left(V_{A.A_1MN} + V_{B.B_1MP} + V_{C.C_1NP}\right) \\ &= \frac{V}{2} - \left(\frac{V}{24} + \frac{V}{24} + \frac{V}{24}\right) \\ &= \frac{3V}{8} = 27\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Chọn phương án **D.** □

2.39 (Đề tham khảo 2018). Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có cạnh bằng 1, lần lượt nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi S là điểm đối xứng với B qua đường thẳng DE. Thể tích của khối đa diện $ABCDSEF$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{5}{6}$. **C.** $\dfrac{11}{12}$. **D.** $\dfrac{7}{6}$.

Lời giải.



Ta có $V_{ABCDSEF} = V_{BCE.ADF} + V_{S.CDFE}$.
Tam giác ADF vuông cân tại A nên $S_{\triangle ADF} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AF = \frac{1}{2}$.
Do đó $V_{BCE.ADF} = S_{\triangle ADF} \cdot AB = \frac{1}{2}$.
Lại có $\triangle BCE$ vuông cân tại B nên $CE = \sqrt{2}$.
Tứ giác $CDFE$ là hình chữ nhật nên $S_{CDFE} = CD \cdot CE = \sqrt{2}$.
Ta có S đối xứng với B qua DE.
Do đó $\mathrm{d}(S, (CDFE)) = \mathrm{d}(B, CDFE)) = \frac{1}{2}CE = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Suy ra $V_{S.CDFE} = \frac{1}{3} \cdot S_{CDFE} \cdot d(S, (CDFE)) = \frac{1}{3}$.
Vậy $V_{ABCDSEF} = V_{BCE.ADF} + V_{S.CDFE} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.
Chọn phương án **B.** □

Chuyên đề 3

Hàm Số Lũy Thừa, Hàm Số Mũ Và Hàm Số Lôgarit

§1. Lũy Thừa

3.1 (Đề thử nghiệm 2017). Cho biểu thức $P = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x^3}}}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $P = x^{\frac{1}{4}}$. **B.** $P = x^{\frac{13}{24}}$. **C.** $P = x^{\frac{2}{3}}$. **D.** $P = x^{\frac{1}{2}}$.

Lời giải.

C1: Nhập vào máy tính biểu thức $\log_X \sqrt[4]{X \cdot \sqrt[3]{X^2 \cdot \sqrt{X^3}}}$.

Nhấn CACL 2 = được kết quả $\frac{13}{24}$ nên chọn phương án $P = x^{\frac{13}{24}}$.

C2: Ta có $P = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x^3}}} = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot x^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^{\frac{7}{2}}}} = \sqrt[4]{x \cdot x^{\frac{7}{6}}} = \sqrt[4]{x^{\frac{13}{6}}} = x^{\frac{13}{24}}$.

Chọn phương án **B.** □

3.2 (Đề tham khảo 2017). Tính giá trị của biểu thức $P = \left(7 + 4\sqrt{3}\right)^{2017} \left(4\sqrt{3} - 7\right)^{2016}$.

A. $P = 7 + 4\sqrt{3}$. **B.** $P = 7 - 4\sqrt{3}$.

C. $P = 1$. **D.** $P = \left(7 + 4\sqrt{3}\right)^{2016}$.

Lời giải.

Ta có $P = \left(7 + 4\sqrt{3}\right)\left[\left(7 + 4\sqrt{3}\right)\left(4\sqrt{3} - 7\right)\right]^{2016} = \left(7 + 4\sqrt{3}\right)(-1)^{2016} = 7 + 4\sqrt{3}$.

Chọn phương án **A.** □

§2. Lôgarit

1. Công thức, lý thuyết

3.3 (Đề tham khảo 2018). Với a là số thực dương bất kỳ, mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $\log(3a) = \frac{1}{3}\log a$. **B.** $\log(3a) = 3\log a$. **C.** $\log a^3 = 3\log a$. **D.** $\log a^3 = \frac{1}{3}\log a$.

Lời giải.

Theo tính chất của lôgarit thì $\log a^3 = 3\log a$.

Chọn phương án **C.** □

3.4 (Đề thử nghiệm 2017). Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $\ln\frac{a}{b} = \ln b - \ln a$. **B.** $\ln(ab) = \ln a . \ln b$.

C. $\ln\frac{a}{b} = \frac{\ln a}{\ln b}$. **D.** $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Lời giải.
Theo tính chất lôgarit của một tích bằng tổng các lôgarit ta chọn phương án $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.
Chọn phương án **D.** □

3.5 (Đề minh họa 2016). Cho hai số thực a và b, với $1 < a < b$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $\log_b a < \log_a b < 1$. **B.** $\log_b a < 1 < \log_a b$. **C.** $\log_a b < 1 < \log_b a$. **D.** $1 < \log_a b < \log_b a$.

Lời giải.
Lấy lôgarit cơ số a cả hai vế, ta có $1 < a < b \Leftrightarrow 0 < 1 < \log_a b$ nên loại các phương án $\log_a b < 1 < \log_b a$ và $\log_b a < \log_a b < 1$.
Lấy lôgarit cơ số b cả hai vế, ta có $1 < a < b \Leftrightarrow 0 < \log_b a < 1$ nên loại phương án $1 < \log_a b < \log_b a$.
Chọn phương án **B.** □

2. Tính toán, rút gọn

3.6 (Đề tham khảo 2020). Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2(a^2)$ bằng

A. $\frac{1}{2}\log_2 a$. **B.** $2 + \log_2 a$. **C.** $2\log_2 a$. **D.** $\frac{1}{2} + \log_2 a$.

Lời giải.
Với a là số thực dương tùy ý, ta có $\log_2\left(a^2\right) = 2\log_2 a$.
Chọn phương án **C.** □

3.7 (Đề chính thức 2020). Với a là số thực dương tùy ý, $\log_4(4a)$ bằng

A. $1 + \log_4 a$. **B.** $4 + \log_4 a$. **C.** $4 - \log_4 a$. **D.** $1 - \log_4 a$.

Lời giải.
Ta có $\log_4(4a) = \log_4 4 + \log_4 a = 1 + \log_4 a$.
Chọn phương án **A.** □

3.8 (Đề tham khảo 2017). Cho a là số thực dương, $a \neq 1$ và $P = \log_{\sqrt[3]{a}} a^3$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $P = \frac{1}{3}$. **B.** $P = 1$. **C.** $P = 9$. **D.** $P = 3$.

Lời giải.

C1: Ta có $P = \log_{\sqrt[3]{a}} a^3 = 3\log_{a^{\frac{1}{3}}} a = 9\log_a a = 9$.

C2: Nhập vào máy tính biểu thức $\log_{\sqrt[3]{X}} X^3$. Nhấn CACL 2 = được kết quả bằng 9.

Chọn phương án **C.** □

3.9 (Đề chính thức 2019). Với a là số thực dương tùy ý, $\log_5 a^2$ bằng

A. $\frac{1}{2} + \log_5 a$. **B.** $2\log_5 a$. **C.** $\frac{1}{2}\log_5 a$. **D.** $2 + \log_5 a$.

Lời giải.
Áp dụng công thức $\log_b a^\alpha = \alpha\log_b a$, ta có $\log_5 a^2 = 2\log_5 a$.
Chọn phương án **B.** □

3.10 (Đề chính thức 2017). Cho a là số thực dương khác 1. Tính $I = \log_{\sqrt{a}} a$.

A. $I = \frac{1}{2}$. **B.** $I = 2$. **C.** $I = -2$. **D.** $I = 0$.

Lời giải.
Ta có $I = \log_{a^{\frac{1}{2}}} a = 2\log_a a = 2$.
Chọn phương án **B.** □

3.11 (Đề tham khảo 2019). Với a và b là hai số thực dương tùy ý, $\log\left(ab^2\right)$ bằng

A. $2\left(\log a + \log b\right)$. **B.** $\log a + 2\log b$. **C.** $\log a + \frac{1}{2}\log b$. **D.** $2\log a + \log b$.

Lời giải.
Ta có $\log\left(ab^2\right) = \log a + \log\left(b^2\right) = \log a + 2\log b$.
Chọn phương án **B.** □

3.12 (Đề chính thức 2020). Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_{a^5} b$ bằng

A. $5\log_a b$. **B.** $\frac{1}{5}\log_a b$. **C.** $\frac{1}{5} + \log_a b$. **D.** $5 + \log_a b$.

Lời giải.

Ta có $\log_{a^5} b = \frac{1}{5}\log_a b$.

Chọn phương án **B.** □

3.13 (Đề tham khảo 2020). Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2\left(a^3\right)$ bằng

A. $\frac{3}{2}\log_2 a$. **B.** $3\log_2 a$. **C.** $\frac{1}{3}\log_2 a$. **D.** $3+\log_2 a$.

Lời giải.

Từ công thức $\log_a b^\alpha = \alpha\log_a b \quad (a,b>0; a\neq 1)$, ta có $\log_2\left(a^3\right) = 3\log_2 a$.

Chọn phương án **B.** □

3.14 (Đề chính thức 2018). Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(5a)-\ln(3a)$ bằng

A. $\ln\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{\ln 5}{\ln 3}$. **C.** $\frac{\ln(5a)}{\ln(3a)}$. **D.** $\ln(2a)$.

Lời giải.

Ta có $\ln(5a)-\ln(3a) = \ln\frac{5a}{3a} = \ln\frac{5}{3}$.

Chọn phương án **A.** □

3.15 (Đề chính thức 2019). Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^4b=16$. Giá trị của $4\log_2 a + \log_2 b$ bằng

A. 16. **B.** 2. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải.

Vì a,b dương nên ta có $a^4b=16 \Leftrightarrow \log_2\left(a^4b\right)=\log_2 16 \Leftrightarrow 4\log_2 a+\log_2 b=4$.

Chọn phương án **D.** □

3.16 (Đề thử nghiệm 2017). Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right) = 1+\frac{1}{3}\log_2 a - \log_2 b$. **B.** $\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right) = 1+3\log_2 a + \log_2 b$.

C. $\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right) = 1+\frac{1}{3}\log_2 a + \log_2 b$. **D.** $\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right) = 1+3\log_2 a - \log_2 b$.

Lời giải.

Ta có $\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right) = \log_2\left(2a^3\right) - \log_2 b = \log_2 2 + \log_2 a^3 - \log_2 b = 1+3\log_2 a - \log_2 b$.

Chọn phương án **D.** □

3.17 (Đề tham khảo 2020). Xét tất cả các số thực dương a và b thỏa mãn $\log_2 a = \log_8(ab)$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $a^3=b$. **B.** $a=b$. **C.** $a=b^2$. **D.** $a^2=b$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\log_2 a = \log_8(ab) &\Leftrightarrow \log_2 a = \frac{1}{3}\log_2(ab)\\ &\Leftrightarrow 3\log_2 a = \log_2 a + \log_2 b\\ &\Leftrightarrow 2\log_2 a = \log_2 b\\ &\Leftrightarrow a^2 = b.\end{aligned}$$

Chọn phương án **D.** □

3.18 (Đề chính thức 2017). Với a, b là các số thực dương tùy ý và a khác 1, đặt $P=\log_a b^3 + \log_{a^2} b^6$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $P=6\log_a b$. **B.** $P=27\log_a b$. **C.** $P=15\log_a b$. **D.** $P=9\log_a b$.

Lời giải.

Ta có $P = 3\log_a b + \frac{6}{2}\log_a b = 6\log_a b$.

Chọn phương án **A.** □

3.19 (Đề minh họa 2016). Cho các số thực dương a, b, với $a\neq 1$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2}\log_a b$. **B.** $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{4}\log_a b$.

C. $\log_{a^2}(ab) = 2 + 2\log_a b$. **D.** $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a b$.

Lời giải.

Ta có $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2}\log_a(ab) = \frac{1}{2}(1 + \log_a b) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a b$.

Chọn phương án **D.** □

3.20 (Đề tham khảo 2020). Xét các số thực a và b thỏa mãn $\log_3\left(3^a \cdot 9^b\right) = \log_9 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $4a + 2b = 1$. **B.** $4ab = 1$. **C.** $2a + 4b = 1$. **D.** $a + 2b = 2$.

Lời giải.

Ta có $\log_3\left(3^a \cdot 9^b\right) = \log_9 3 \Leftrightarrow \log_3(3^a) + \log_3\left(3^{2b}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a + 2b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2a + 4b = 1$.

Chọn phương án **C.** □

3.21 (Đề chính thức 2020). Với a, b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_2 a - 2\log_4 b = 3$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a = 6b$. **B.** $a = 8b^2$. **C.** $a = 8b$. **D.** $a = 8b^4$.

Lời giải.

Ta có $\log_2 a - 2\log_4 b = 3 \Leftrightarrow \log_2 a - \log_2 b = 3 \Leftrightarrow \log_2\frac{a}{b} = 3 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 2^3 \Leftrightarrow a = 8b$.

Chọn phương án **C.** □

3.22 (Đề chính thức 2020). Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $4^{\log_2(a^2b)} = 3a^3$. Giá trị của ab^2 bằng

A. 2. **B.** 12. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải.

Ta có $4^{\log_2(a^2b)} = 3a^3 \Leftrightarrow \left(2^{\log_2(a^2b)}\right)^2 = 3a^3 \Leftrightarrow \left(a^2b\right)^2 = 3a^3 \Leftrightarrow a^4b^2 = 3a^3 \Leftrightarrow ab^2 = 3$.

Chọn phương án **C.** □

3.23 (Đề tham khảo 2017). Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a \neq 1, a \neq \sqrt{b}$ và $\log_a b = \sqrt{3}$. Tính $P = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\sqrt{\frac{b}{a}}$.

A. $P = -1 - \sqrt{3}$. **B.** $P = -1 + \sqrt{3}$. **C.** $P = -5 + 3\sqrt{3}$. **D.** $P = -5 - 3\sqrt{3}$.

Lời giải.

C1: Ta có $P = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\sqrt{\frac{b}{a}} = \dfrac{\log_a\sqrt{\frac{b}{a}}}{\log_a\frac{\sqrt{b}}{a}} = \dfrac{\frac{1}{2}(\log_a b - 1)}{\frac{1}{2}\log_a b - 1} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 2} = -1 - \sqrt{3}$.

C2: Ta có $\log_a b = \sqrt{3} \Leftrightarrow b = a^{\sqrt{3}}$. Nhập máy $\log_{\frac{\sqrt{X^{\sqrt{3}}}}{X}}\sqrt{\frac{X^{\sqrt{3}}}{X}}$.

Nhấn CALC 2 = được kết quả $P = -1 - \sqrt{3}$.

Chọn phương án **A.** □

3.24 (Đề tham khảo 2018). Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 2\log u_{10}} = 2\log u_{10}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geqslant 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 5^{100}$ bằng

A. 248. **B.** 290. **C.** 247. **D.** 229.

Lời giải.

Biến đổi giả thiết ta có

$$\sqrt{2 - \log\frac{u_{10}^2}{u_1}} = \log\frac{u_{10}^2}{u_1} \Leftrightarrow \begin{cases} \log\dfrac{u_{10}^2}{u_1} \geqslant 0 \\ 2 - \log\dfrac{u_{10}^2}{u_1} = \log^2\dfrac{u_{10}^2}{u_1} \end{cases} \Leftrightarrow \log\frac{u_{10}^2}{u_1} = 1 \Leftrightarrow \frac{u_{10}^2}{u_1} = 10 \qquad (1)$$

Từ điều kiện $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geqslant 1$, ta có (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 2$.

Do đó công thức số hạng tổng quát của (u_n) là $u_n = u_1 \cdot 2^{n-1}$.

Suy ra $u_{10} = u_1.2^9$ thay vào (1) được $u_1 \cdot 2^{18} = 10 \Leftrightarrow u_1 = 5 \cdot 2^{-17}$.
Khi đó $u_n = 5 \cdot 2^{-17} \cdot 2^{n-1} = 5 \cdot 2^{n-18}$.
Suy ra $u_n > 5^{500} \Leftrightarrow 2^{n-18} > 5^{99} \Leftrightarrow n > 18 + 99\log_2 5 \approx 247{,}87$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 5^{500}$ là 248.
Chọn phương án **A**. □

3. Biểu diễn lôgarit

3.25 (Đề tham khảo 2019). Đặt $\log_3 2 = a$, khi đó $\log_{16} 27$ bằng

A. $\dfrac{3a}{4}$. **B.** $\dfrac{4}{3a}$. **C.** $\dfrac{4a}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{4a}$.

Lời giải.
Ta có $\log_{16} 27 = \log_{2^4} 3^3 = \dfrac{3}{4}\log_2 3 = \dfrac{3}{4\log_3 2} = \dfrac{3}{4a}$.
Chọn phương án **D**. □

3.26 (Đề minh họa 2016). Đặt $a = \log_2 3, b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b.

A. $\log_6 45 = \dfrac{2a^2 - 2ab}{ab}$. **B.** $\log_6 45 = \dfrac{a + 2ab}{ab + b}$.

C. $\log_6 45 = \dfrac{2a^2 - 2ab}{ab + b}$. **D.** $\log_6 45 = \dfrac{a + 2ab}{ab}$.

Lời giải.

C1: Ta có $\log_6 45 = \dfrac{\log_3 45}{\log_3 6} = \dfrac{\log_3(9 \cdot 5)}{\log_3(2 \cdot 3)} = \dfrac{2 + \log_3 5}{\log_3 2 + 1} = \dfrac{2 + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} + 1} = \dfrac{2ab + a}{ab + b}$.

C2: Nhập $\log_2 3$ lưu vào biến nhớ A; $\log_5 3$ lưu vào biến nhớ B.
Nhập $\log_6 45-$ các phương án, được kết quả 0 thì chọn.

Chọn phương án **B**. □

3.27 (Đề chính thức 2017). Cho $\log_a x = 3$, $\log_b x = 4$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{ab} x$.

A. $P = \dfrac{12}{7}$. **B.** $P = \dfrac{7}{12}$. **C.** $P = \dfrac{1}{12}$. **D.** $P = 12$.

Lời giải.
Ta có $P = \log_{ab} x = \dfrac{1}{\log_x(ab)} = \dfrac{1}{\log_x a + \log_x b} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\log_a x} + \dfrac{1}{\log_b x}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{12}{7}$.

Chọn phương án **A**. □

4. Cực trị lôgarit

3.28 (Đề thử nghiệm 2017). Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = \log^2_{\frac{a}{b}}\left(a^2\right) + 3\log_b\left(\dfrac{a}{b}\right)$.

A. $P_{\min} = 13$. **B.** $P_{\min} = 19$. **C.** $P_{\min} = 14$. **D.** $P_{\min} = 15$.

Lời giải.

C1: Ta có $P = 4\log^2_{\frac{a}{b}} a + 3(\log_b a - 1) = \dfrac{4}{(1 - \log_a b)^2} + \dfrac{3}{\log_a b} - 3$.

Đặt $t = \log_a b$, với $1 < b < a$ ta có $0 < t < 1$. Khi đó $P = \dfrac{4}{(1-t)^2} + \dfrac{3}{t} - 3$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{4}{(1-t)^2} + \dfrac{3}{t} - 3$ trên $(0; 1)$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{8}{(1-t)^3} - \dfrac{3}{t^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 8t^2 = 3(1-t)^3 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{3}$. Bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{3}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	15	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min\limits_{(0;1)} f(t) = f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 15$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 15.

C2: Chọn $b = 2$. Chọn MODE 7. Nhập vào máy tính biểu thức $\left(\log_{\frac{X}{2}}\left(X^2\right)\right)^2 + 3\log_2\left(\dfrac{X}{2}\right)$.

Chọn START = 3, END = 20 và STEP =1, ta được phương án $P_{\min} = 15$.

Chọn phương án **D.** □

§3. Hàm Số Lũy Thừa, Hàm Số Mũ Và Hàm Số Lôgarit

1. Tìm tập xác định

3.29 (Đề chính thức 2020). Tập xác định của hàm số $y = 4^x$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(0; +\infty)$. **C.** $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. **D.** $[0; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $y = 4^x$ là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Chọn phương án **A.** □

3.30 (Đề chính thức 2020). Tập xác định của hàm số $y = \log_5 x$ là

A. $(-\infty; 0)$. **B.** $(0; +\infty)$. **C.** $(-\infty; +\infty)$. **D.** $[0; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $y = \log_5 x$ là $\mathscr{D} = (0; +\infty)$.

Chọn phương án **B.** □

3.31 (Đề tham khảo 2020). Tập xác định của hàm số $y = \log_2 x$ là

A. $(0; +\infty)$. **B.** $(-\infty; +\infty)$. **C.** $[0; +\infty)$. **D.** $[2; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D} = (0; +\infty)$.

Chọn phương án **A.** □

3.32 (Đề chính thức 2017). Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{3}}$.

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. **B.** $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. **C.** $\mathscr{D} = (1; +\infty)$. **D.** $\mathscr{D} = (-\infty; 1)$.

Lời giải.

Số mũ $\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$ nên điều kiện là $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Vậy $\mathscr{D} = (1; +\infty)$.

Chọn phương án **C.** □

3.33 (Đề minh họa 2016). Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \log_2\left(x^2 - 2x - 3\right)$.

A. $\mathscr{D} = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. **B.** $\mathscr{D} = (-1; 3)$.

C. $\mathscr{D} = [-1; 3]$. **D.** $\mathscr{D} = (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < -1 \end{array}\right.$. Do đó tập xác định $\mathscr{D} = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Chọn phương án **A.** □

3.34 (Đề chính thức 2017). Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \log_5 \dfrac{x-3}{x+2}$.

A. $\mathscr{D} = (-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$. **B.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

C. $\mathscr{D} = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$. **D.** $\mathscr{D} = (-2; 3)$.

Lời giải.

C1: Điều kiện $\frac{x-3}{x+2} > 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < -2 \end{array}\right.$, suy ra $\mathscr{D} = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

C2: Nhập vào máy tính biểu thức $\log_5 \frac{X-3}{X+2}$.
Nhấn CALC $0 =$ máy báo lỗi nên loại các phương án $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ và $\mathscr{D} = (-2; 3)$. Nhấn CALC $3 =$ máy báo lỗi nên loại phương án $\mathscr{D} = (-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$.

Chọn phương án **C.** □

2. Tính đạo hàm

3.35 (Đề tham khảo 2017). Tìm đạo hàm của hàm số $y = \log x$.

A. $y' = \frac{1}{10 \ln x}$. **B.** $y' = \frac{1}{x}$. **C.** $y' = \frac{1}{x \ln 10}$. **D.** $y' = \frac{\ln 10}{x}$.

Lời giải.
Từ công thức $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, ta có $y' = \frac{1}{x \ln 10}$.
Chọn phương án **C.** □

3.36 (Đề minh họa 2016). Tính đạo hàm của hàm số $y = 13^x$.

A. $y' = \frac{13^x}{\ln 13}$. **B.** $y' = 13^x \cdot \ln 13$. **C.** $y' = 13^x$. **D.** $y' = x \cdot 13^{x-1}$.

Lời giải.
Sử dụng công thức $(a^x)' = a^x \ln 3$ ta có $y' = 13^x \ln 13$.
Chọn phương án **B.** □

3.37 (Đề tham khảo 2019). Hàm số $f(x) = \log_2 \left(x^2 - 2x\right)$ có đạo hàm

A. $f'(x) = \frac{\ln 2}{x^2 - 2x}$. **B.** $f'(x) = \frac{(2x-2)\ln 2}{x^2 - 2x}$.

C. $f'(x) = \frac{1}{\left(x^2 - 2x\right)\ln 2}$. **D.** $f'(x) = \frac{2x-2}{\left(x^2 - 2x\right)\ln 2}$.

Lời giải.
Áp dụng công thức $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$, ta có $f'(x) = \frac{\left(x^2 - 2x\right)'}{\left(x^2 - 2x\right)\ln 2} = \frac{2x-2}{\left(x^2 - 2x\right)\ln 2}$.

Chọn phương án **D.** □

3.38 (Đề thử nghiệm 2017). Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln\left(1 + \sqrt{x+1}\right)$.

A. $y' = \frac{2}{\sqrt{x+1}\left(1 + \sqrt{x+1}\right)}$. **B.** $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}\left(1 + \sqrt{x+1}\right)}$.

C. $y' = \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}}$. **D.** $y' = \frac{1}{\sqrt{x+1}\left(1 + \sqrt{x+1}\right)}$.

Lời giải.
Ta có $y' = \frac{\left(1 + \sqrt{x+1}\right)'}{1 + \sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}\left(1 + \sqrt{x+1}\right)}$.
Chọn phương án **B.** □

3.39 (Đề chính thức 2019). Hàm số $y = 2^{x^2-3x}$ có đạo hàm là

A. $(x^2 - 3x) \cdot 2^{x^2-3x-1}$. **B.** $(2x-3) \cdot 2^{x^2-3x} \cdot \ln 2$.

C. $2^{x^2-3x} \cdot \ln 2$. **D.** $(2x-3) \cdot 2^{x^2-3x}$.

Lời giải.
Áp dụng công thức $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$, ta có $y' = \left(x^2 - 3x\right)' \cdot 2^{x^2-3x} \cdot \ln 2 = (2x-3) \cdot 2^{x^2-3x} \cdot \ln 2$.
Chọn phương án **B.** □

3.40 (Đề tham khảo 2017). Cho hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$, mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $2y' + xy'' = \frac{1}{x^2}$. **B.** $y' + xy'' = \frac{1}{x^2}$. **C.** $y' + xy'' = -\frac{1}{x^2}$. **D.** $2y' + xy'' = -\frac{1}{x^2}$.

Lời giải.
Ta có $y' = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$; $y'' = \dfrac{-x - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \dfrac{-3 + 2\ln x}{x^3}$.
Khi đó $2y' + xy'' = \dfrac{2(1 - \ln x)}{x^2} + \dfrac{-3 + 2\ln x}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2}$ nên chọn phương án $2y' + xy'' = -\dfrac{1}{x^2}$.
Chọn phương án **D.** □

3.41 (Đề minh họa 2016). Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{x + 1}{4^x}$.

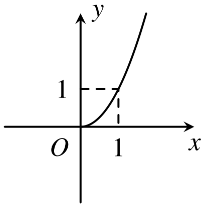
A. $y' = \dfrac{1 + 2(x + 1)\ln 2}{2^{x^2}}$. **B.** $y' = \dfrac{1 + 2(x + 1)\ln 2}{2^{2x}}$.

C. $y' = \dfrac{1 - 2(x + 1)\ln 2}{2^{2x}}$. **D.** $y' = \dfrac{1 - 2(x + 1)\ln 2}{2^{x^2}}$.

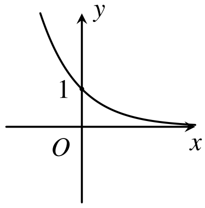
Lời giải.
Ta có $y' = \dfrac{4^x - (x + 1)4^x \ln 4}{(4^x)^2} = \dfrac{4^x(1 - (x + 1)\ln 4)}{(4^x)^2} = \dfrac{1 - 2(x + 1)\ln 2}{4^x}$.
Chọn phương án **C.** □

3. Sự biến thiên và đồ thị

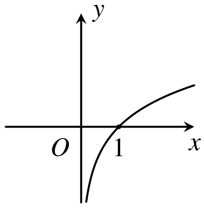
3.42 (Đề tham khảo 2017). Cho hàm số $f(x) = x\ln x$. Một trong bốn đồ thị cho trong bốn phương án A, B, C, D dưới đây là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$. Tìm đồ thị đó.

A. 

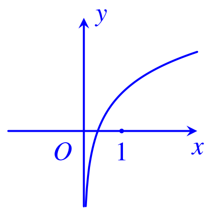
.

B. 

.

C. 

.

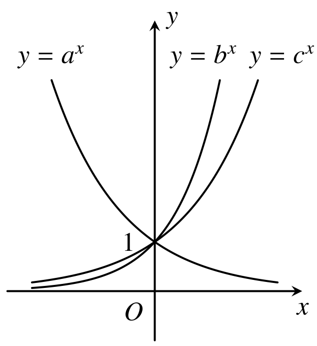
D. 

.

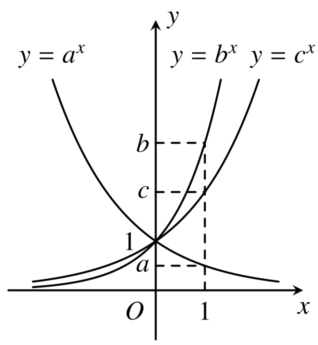
Lời giải.
Ta có $f'(x) = \ln x + 1$ xác định trên $(0; +\infty)$ nên loại các phương án A và D.
Lại có $f'(1) = 1$ nên loại phương án B.
Chọn phương án **D.** □

3.43 (Đề thử nghiệm 2017). Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y = a^x, y = b^x, y = c^x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $c < a < b$. **B.** $a < b < c$. **C.** $b < c < a$. **D.** $a < c < b$.



Lời giải.
Trên đồ thị kẻ đường thẳng $x = 1$ cắt các đồ thị $y = a^x, y = b^x, y = c^x$ lần lượt tại các điểm có tung độ a, b, c. Dựa vào hình vẽ ta thấy $a < c < b$.



Chọn phương án **D.** □

3.44 (Đề thử nghiệm 2017). Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \ln\left(x^2 + 1\right) - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

A. $(-\infty; -1]$. **B.** $[1; +\infty)$. **C.** $[-1; 1]$. **D.** $(-\infty; -1)$.

Lời giải.
Ta có $y' = \dfrac{2x}{x^2+1} - m$.

C1: Xét $m = 1$, ta có $y' = \dfrac{2x}{x^2+1} - 1 = \dfrac{-(x-1)^2}{x^2+1} \leqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (không thỏa mãn ycbt) nên loại phương án $[-1; 1]$ và $[1; +\infty)$.
Xét $m = -1$, ta có $y' = \dfrac{2x}{x^2+1} + 1 = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1} \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn ycbt) nên loại phương án $(-\infty; -1)$.

C2: Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$ khi $y' \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Hay $\dfrac{2x}{x^2+1} - m \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leqslant \dfrac{2x}{x^2+1}, \forall x \in \mathbb{R}$. (1)
Xét hàm số $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(x) = \dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên suy ra (1) $\Leftrightarrow m \leqslant \min\limits_{\mathbb{R}} f(x) \Leftrightarrow m \leqslant -1$.

Chọn phương án **A.** □

§4. Phương Trình, Bất Phương Trình Mũ

1. Phương trình cơ bản

3.45 (Đề chính thức 2020). Nghiệm của phương trình $3^{x-1} = 9$ là
A. $x = 2$. B. $x = 3$. C. $x = -3$. D. $x = -2$.
Lời giải.
Ta có $3^{x-1} = 9 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^2 \Leftrightarrow x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$.
Chọn phương án **B.** □

3.46 (Đề chính thức 2018). Phương trình $2^{2x+1} = 32$ có nghiệm là
A. $x = 3$. B. $x = \dfrac{3}{2}$. C. $x = 2$. D. $x = \dfrac{5}{2}$.
Lời giải.
Ta có $2^{2x+1} = 32 \Leftrightarrow 2x + 1 = 5 \Leftrightarrow x = 2$.
Chọn phương án **C.** □

3.47 (Đề thử nghiệm 2017). Tìm nghiệm của phương trình $3^{x-1} = 27$.
A. $x = 9$. B. $x = 10$. C. $x = 3$. D. $x = 4$.
Lời giải.
Ta có $3^{x-1} = 27 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^3 \Leftrightarrow x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 4$.
Chọn phương án **D.** □

3.48 (Đề tham khảo 2020). Nghiệm của phương trình $3^{x-1} = 27$ là
A. $x = 3$. B. $x = 4$. C. $x = 1$. D. $x = 2$.
Lời giải.
Ta có $3^{x-1} = 27 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^3 \Leftrightarrow x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 4$.
Chọn phương án **B.** □

3.49 (Đề chính thức 2019). Nghiệm của phương trình $3^{2x-1} = 27$ là

A. $x = 5$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = 4$.

Lời giải.

C1: Ta có $3^{2x-1} = 27 \Leftrightarrow 3^{2x-1} = 3^3 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 2$.

C2: Nhập vào máy tính biểu thức $3^{2X-1} - 27$. Dùng chức năng CALC, dò được nghiệm $x = 2$.

Chọn phương án **B.** □

3.50 (Đề tham khảo 2017). Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+1} - \frac{1}{5} > 0$.

A. $S = (-2; +\infty)$. **B.** $S = (-1; +\infty)$. **C.** $S = (1; +\infty)$. **D.** $S = (-\infty; -2)$.

Lời giải.

Ta có bất phương trình tương đương $5^{x+1} > 5^{-1} \Leftrightarrow x + 1 > -1 \Leftrightarrow x > -2$.

Chọn phương án **A.** □

3.51 (Đề minh họa 2016). Cho hàm số $f(x) = 2^x \cdot 7^{x^2}$. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $f(x) < 1 \Leftrightarrow 1 + x\log_2 7 < 0$. **B.** $f(x) < 1 \Leftrightarrow x\log_7 2 + x^2 < 0$.

C. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x\ln 2 + x^2 \ln 7 < 0$. **D.** $f(x) < 1 \Leftrightarrow x + x^2 \log_2 7 < 0$.

Lời giải.

Ta có $2^x \cdot 7^{x^2} < 1 \Leftrightarrow \log_2\left(2^x \cdot 7^{x^2}\right) < 0 \Leftrightarrow x + x^2\log_2 7 < 0$.

Chọn phương án **A.** □

3.52 (Đề chính thức 2020). Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-13} < 27$ là

A. $(-4; 4)$. **B.** $(-4; 4)$. **C.** $(4; +\infty)$. **D.** $(-\infty; 4)$.

Lời giải.

Ta có $3^{x^2-13} < 27 \Leftrightarrow 3^{x^2-13} < 3^3 \Leftrightarrow x^2 - 13 < 3 \Leftrightarrow x^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow -4 < x < 4$.

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $(-4; 4)$.

Chọn phương án **A.** □

3.53 (Đề tham khảo 2019). Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-2x} < 27$ là

A. $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. **B.** $(-\infty; -1)$.

C. $(-1; 3)$. **D.** $(3; +\infty)$.

Lời giải.

C1: Ta có $3^{x^2-2x} < 27 \Leftrightarrow 3^{x^2-2x} < 3^3 \Leftrightarrow x^2 - 2x < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 3$.

C2: Nhập vào máy tính biểu thức $3^{X^2-2X} - 27$. Dùng chức năng CACL để dò nghiệm.

Chọn phương án **C.** □

2. Phương pháp đưa về cùng cơ số

3.54 (Đề chính thức 2020). Nghiệm của phương trình $2^{2x-3} = 2^x$ là

A. $x = 8$. **B.** $x = -8$. **C.** $x = -3$. **D.** $x = 3$.

Lời giải.

Ta có $2^{2x-3} = 2^x \Leftrightarrow 2x - 3 = x \Leftrightarrow x = 3$.

Chọn phương án **D.** □

3.55 (Đề tham khảo 2018). Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x} < 2^{x+6}$ là

A. $(0; 64)$. **B.** $(6; +\infty)$. **C.** $(-\infty; 6)$. **D.** $(0; 6)$.

Lời giải.

Ta có $2^{2x} < 2^{x+6} \Leftrightarrow 2x < x + 6 \Leftrightarrow x < 6$.

Chọn phương án **C.** □

3.56 (Đề tham khảo 2020). Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x-1} \geqslant 5^{x^2-x-9}$ là

A. $(-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$. **B.** $(-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$.

C. $[-2; 4]$. **D.** $[-4; 2]$.

Lời giải.

Ta có $5^{x-1} \geqslant 5^{x^2-x-9} \Leftrightarrow x - 1 \geqslant x^2 - x - 9 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 \leqslant 0 \Leftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 4$.

Chọn phương án **C.** □

3. Phương pháp đặt ẩn phụ

3.57 (Đề chính thức 2017). Cho phương trình $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$. Khi đặt $t = 2^x$, ta được phương trình nào dưới đây?

A. $2t^2 - 3 = 0$. **B.** $t^2 + 2t - 3 = 0$. **C.** $4t - 3 = 0$. **D.** $t^2 + t - 3 = 0$.

Lời giải.
Phương trình tương đương với $2^{2x} + 2 \cdot 2^x - 3 = 0$.
Do đó đặt $t = 2^x$, ta được phương trình $t^2 + 2t - 3 = 0$.
Chọn phương án **B.** □

3.58 (Đề tham khảo 2020). Tập nghiệm của bất phương trình $9^x + 2 \cdot 3^x - 3 > 0$ là

A. $(0; +\infty)$. **B.** $(1; +\infty)$. **C.** $[0; +\infty)$. **D.** $[1; +\infty)$.

Lời giải.
Ta có $9^x + 2 \cdot 3^x - 3 > 0 \Leftrightarrow 3^{2x} + 2 \cdot 3^x - 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x > 1 \\ 3^x < -3 \quad \text{(vô nghiệm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x > 0.$
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (0; +\infty)$.
Chọn phương án **A.** □

3.59 (Đề chính thức 2018). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x - m \cdot 4^{x+1} + 5m^2 - 45 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 6. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 13.

Lời giải.
Đặt $4^x = t > 0$, phương trình đã cho trở thành $t^2 - 4mt + 5m^2 - 45 = 0$. (1)
Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm dương phân biệt.

Từ đó suy ra $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 45 - m^2 > 0 \\ 4m > 0 \\ 5m^2 - 45 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\sqrt{5} < m < 3\sqrt{5} \\ m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < -3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 3\sqrt{5}.$

Do đó $S = \{4; 5; 6\}$. Vậy S có ba phần tử.
Chọn phương án **B.** □

3.60 (Đề tham khảo 2018). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $16^x - 2 \cdot 12^x + (m-2) \cdot 9^x = 0$ có nghiệm dương.

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.
Ta có phương trình tương đương $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x + m - 2 = 0.$

Đặt $\left(\frac{4}{3}\right)^x = t$, phương trình trở thành $t^2 - 2t + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -t^2 + 2t + 2$. (1)
Phương trình đã cho có nghiệm dương khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm lớn hơn 1.
Xét hàm số $g(t) = -t^2 + 2t + 2$ trên $(1; +\infty)$ có $g'(t) = -2t + 2 < 0, \forall t \in (1; +\infty)$.
Bảng biến thiên

t	1		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	
$g(t)$	3	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra (1) có nghiệm trên $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi $m < 3$.
Do đó có 2 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn phương án **D.** □

4. Phương pháp hàm số

3.61 (Đề tham khảo 2019). Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x) < e^x + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

A. $m > f(1) - e$. **B.** $m \geqslant f(1) - e$.
C. $m > f(-1) - \frac{1}{e}$. **D.** $m \geqslant f(-1) - \frac{1}{e}$.

Lời giải.
Ta có $f(x) < e^x + m \Leftrightarrow f(x) - e^x < m$. (1)
Xét $g(x) = f(x) - e^x$ trên $(-1; 1)$ có $g'(x) = f'(x) - e^x$.
Từ bảng biến thiên ta có $f'(x) \leqslant 0, \forall x \in (-1; 1)$ nên $g'(x) < 0, \forall x \in (-1; 1)$.
Suy ra $g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 1)$, hay $g(x) < g(-1), \forall x \in (-1; 1)$.
Do đó (1) đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi $m \geqslant g(-1) \Leftrightarrow m \geqslant f(-1) - \frac{1}{e}$.
Chọn phương án **D.** □

3.62 (Đề thử nghiệm 2017). Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực m để phương trình $6^x + (3 - m)2^x - m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.
A. $(2; 4)$. **B.** $[3; 4]$. **C.** $(3; 4)$. **D.** $[2; 4]$.

Lời giải.

C1: Xét trường hợp $m = 4$, phương trình trở thành $6^x - 2^x - 4 = 0$.
Nhận thấy phương trình có một nghiệm bằng 1 nằm ngoài khoảng $(0; 1)$, do đó loại các phương án $[3; 4]$ và $[2; 4]$.
Xét trường hợp $m = 3$, phương trình trở thành $6^x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \log_6 3 \in (0; 1)$, do đó loại phương án $(3; 4)$.

C2: Ta có phương trình tương đương $6^x + 3 \cdot 2^x = m(2^x + 1) \Leftrightarrow m = \dfrac{6^x + 3 \cdot 2^x}{2^x + 1}$.
Xét hàm số $f(x) = \dfrac{6^x + 3 \cdot 2^x}{2^x + 1}$ trên $[0; 1]$ có $f'(x) = \dfrac{12^x \ln 3 + 6^x \ln 6 + 3 \cdot 2^x \ln 2}{(2^x + 1)^2} > 0, \forall x \in [0; 1]$.
Do đó với mọi $x \in (0; 1)$ ta có $f(0) < f(x) < f(1) \Leftrightarrow 2 < f(x) < 4$.

Chọn phương án **A.** □

5. Phương trình, bất phương trình nhiều ẩn

3.63 (Đề tham khảo 2020). Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^x = b^y = \sqrt{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?
A. $\left[2; \frac{5}{2}\right)$. **B.** $[3; 4)$. **C.** $(1; 2)$. **D.** $\left[\frac{5}{2}; 3\right)$.

Lời giải.
Từ giả thiết ta có

$$a^x = \sqrt{ab} \Leftrightarrow \log_a a^x = \log_a \sqrt{ab} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a b;$$
$$b^y = \sqrt{ab} \Leftrightarrow \log_b b^y = \log_b \sqrt{ab} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_b a.$$

Từ đó suy ra

$$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a b + 1 + \log_b a = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\log_a b + \log_b a.$$

C1: Đặt $\log_a b = t > 0$ (vì $a > 1, b > 1$), ta có $P = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{t}$; $P' = \frac{1}{2} - \frac{1}{t^2}$; $P' = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$.
Bảng biến thiên

t	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
P'		$-$	0	$+$	
P	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}+\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $P_{\min} = P\left(\sqrt{2}\right) = \frac{3}{2} + \sqrt{2} \in \left[\frac{5}{2}; 3\right)$.

<u>C2</u>: Vì $a > 1, b > 1$ nên $\log_a b > 0, \log_b a > 0$, do đó theo bất đẳng thức $AM - GM$, ta có

$$P \geqslant \frac{3}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{2}\log_a b \cdot \log_b a} = \frac{3}{2} + \sqrt{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{1}{2}\log_a b = \log_b a \Leftrightarrow \log_a b = \sqrt{2}$.

Vậy $P_{\min} = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ khi $\log_a b = \sqrt{2}$.

Chọn phương án **D.** □

3.64 (Đề chính thức 2020). Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geqslant 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 4x + 6y$ bằng

A. $\frac{33}{4}$. **B.** $\frac{49}{8}$. **C.** $\frac{65}{8}$. **D.** $\frac{57}{8}$.

Lời giải.

Ta có $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geqslant 3 \Leftrightarrow 2(x+y-1) - 1 + y\left(2^{2(x+y-1)} - 2\right) \geqslant 0$. (1)

<u>TH1</u>: $2(x+y-1) < 1 \Rightarrow 2^{2(x+y-1)} < 2 \Rightarrow 2(x+y-1) - 1 + y\left(2^{2(x+y-1)} - 2\right) < 0 \Rightarrow$ (1) luôn sai.

<u>TH2</u>: $2(x+y-1) \geqslant 1 \Rightarrow 2^{2(x+y-1)} \geqslant 2 \Rightarrow 2(x+y-1) - 1 + y\left(2^{2(x+y-1)} - 2\right) \geqslant 0 \Rightarrow$ (1) luôn đúng.

Do đó ta có (1) $\Leftrightarrow 2(x+y-1) \geqslant 1 \Leftrightarrow x + y \geqslant \frac{3}{2}$.

Suy ra $P = x^2+y^2+4x+6y = (x+2)^2+(y+3)^2-13 \geqslant \frac{1}{2}(x+2+y+3^2-13 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+5\right)^2 - 13 = \frac{65}{8}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x + y = \frac{3}{2} \\ x + 2 = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ y = \frac{1}{4}. \end{cases}$

Vậy $\min P = \frac{65}{8}$.

Chọn phương án **C.** □

§5. Phương Trình, Bất Phương Trình Lôgarit

1. Phương trình, bất phương trình cơ bản

3.65 (Đề tham khảo 2020). Tập nghiệm của bất phương trình $\log x \geqslant 1$ là

A. $(-\infty; 10)$. **B.** $(0; +\infty)$. **C.** $(10; +\infty)$. **D.** $[10; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\log x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 10$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S = [10; +\infty)$.

Chọn phương án **D.** □

3.66 (Đề tham khảo 2020). Nghiệm của phương trình $\log_3(2x-1)=2$ là

A. $x=\dfrac{7}{2}$. **B.** $x=\dfrac{9}{2}$. **C.** $x=5$. **D.** $x=3$.

Lời giải.
Ta có $\log_3(2x-1)=2 \Leftrightarrow 2x-1=3^2 \Leftrightarrow 2x=10 \Leftrightarrow x=5$.
Chọn phương án **C.** □

3.67 (Đề chính thức 2020). Nghiệm của phương trình $\log_2(x+8)=5$ là

A. $x=40$. **B.** $x=2$. **C.** $x=24$. **D.** $x=17$.

Lời giải.
Ta có $\log_2(x+8)=5 \Leftrightarrow x+8=2^5 \Leftrightarrow x+8=32 \Leftrightarrow x=24$.
Chọn phương án **C.** □

3.68 (Đề tham khảo 2019). Tập nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2-x+2\right)=1$ là

A. $\{-1;0\}$. **B.** $\{0\}$. **C.** $\{1\}$. **D.** $\{0;1\}$.

Lời giải.

C1: Ta có $\log_2\left(x^2-x+2\right)=1 \Leftrightarrow x^2-x+2=2 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1. \end{array}\right.$

C2: Nhập vào máy tính biểu thức $\log_2\left(X^2-X+2\right)-1$. Dùng chức năng CALC, dò được nghiệm $x=0$ và $x=1$.

Chọn phương án **D.** □

3.69 (Đề chính thức 2020). Nghiệm của phương trình $\log_3(x-1)=2$ là

A. $x=8$. **B.** $x=10$. **C.** $x=7$. **D.** $x=9$.

Lời giải.
Ta có $\log_3(x-1)=2 \Leftrightarrow x-1=9 \Leftrightarrow x=10$.
Chọn phương án **B.** □

3.70 (Đề minh họa 2016). Giải bất phương trình $\log_2(3x-1)>3$.

A. $x<3$. **B.** $\dfrac{1}{3}<x<3$. **C.** $x>\dfrac{10}{3}$. **D.** $x>3$.

Lời giải.
Ta có $\log_2(3x-1)>3 \Leftrightarrow 3x-1>2^3 \Leftrightarrow 3x>9 \Leftrightarrow x>3$.
Chọn phương án **D.** □

3.71 (Đề minh họa 2016). Giải phương trình $\log_4(x-1)=3$.

A. $x=63$. **B.** $x=82$. **C.** $x=65$. **D.** $x=80$.

Lời giải.
Ta có $\log_4(x-1)=3 \Leftrightarrow x-1=4^3 \Leftrightarrow x=65$.
Chọn phương án **C.** □

3.72 (Đề chính thức 2020). Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(18-x^2\right)\geqslant 2$ là

A. $(-\infty;3]$. **B.** $(0;3]$.

C. $[-3;3]$. **D.** $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.

Lời giải.
Ta có $\log_3\left(18-x^2\right)\geqslant 2 \Leftrightarrow 18-x^2\geqslant 3^2 \Leftrightarrow x^2\leqslant 9 \Leftrightarrow -3\leqslant x\leqslant 3$.
Vậy bất phương trình có tập nghiệm $S=[-3;3]$.
Chọn phương án **C.** □

3.73 (Đề tham khảo 2019). Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3(7-3^x)=2-x$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải.
Ta có $\log_3(7-3^x)=2-x \Leftrightarrow 7-3^x=3^{2-x} \Leftrightarrow 7\cdot 3^x-3^{2x}=9 \Leftrightarrow 3^{2x}-7\cdot 3^x+9=0$.
Khi đó phương trình có 2 nghiệm x_1,x_2 thỏa $3^{x_1}\cdot 3^{x_2}=9 \Leftrightarrow 3^{x_1+x_2}=3^2 \Leftrightarrow x_1+x_2=2$.
Chọn phương án **B.** □

3.74 (Đề tham khảo 2018). Tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3 x\cdot\log_9 x\cdot\log_{27} x\cdot\log_{81} x=\dfrac{2}{3}$ bằng

A. 0. **B**. $\frac{80}{9}$. **C**. $\frac{82}{9}$. **D**. 9.

Lời giải.

Ta có $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \log_3 x \cdot \frac{1}{2}\log_3 x \cdot \frac{1}{3}\log_3 x \cdot \frac{1}{4}\log_3 x = \frac{2}{3}$.

Rút gọn được $(\log_3 x)^4 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x = 2\\ \log_3 x = -2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 9\\ x = \frac{1}{9}\end{array}\right.$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là $9 + \frac{1}{9} = \frac{82}{9}$.

Chọn phương án **C**. □

2. Phương pháp đưa về cùng cơ số

3.75 (Đề thử nghiệm 2017). Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$.

A. $S = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$. **B**. $S = (-\infty; 2)$. **C**. $S = (-1; 2)$. **D**. $S = (2; +\infty)$.

Lời giải.

Với điều kiện $x > \frac{1}{2}$ ta có bất phương trình tương đương $x + 1 > 2x - 1 \Leftrightarrow x < 2$.

Kết hợp điều kiện bất phương trình có tập nghiệm $S = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Chọn phương án **A**. □

3.76 (Đề chính thức 2019). Nghiệm của phương trình $\log_3(x + 1) + 1 = \log_3(4x + 1)$ là

A. $x = 4$. **B**. $x = 3$. **C**. $x = -3$. **D**. $x = 2$.

Lời giải.

C1: Điều kiện $x > -\frac{1}{4}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\log_3 3(x + 1) = \log_3(4x + 1) \Leftrightarrow 3(x + 1) = 4x + 1 \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{(thỏa mãn)}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.

C2: Nhập vào máy tính biểu thức $\log_3(X + 1) + 1 - \log_3(4X + 1)$. Dùng chức năng CALC, dò được nghiệm $x = 2$.

Chọn phương án **D**. □

3.77 (Đề tham khảo 2017). Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x - 1) + \log_2(x + 1) = 3$.

A. $S = \{-3; 3\}$. **B**. $S = \{3\}$. **C**. $S = \{4\}$. **D**. $S = \{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$.

Lời giải.

Từ điều kiện $x > 1$ ta loại được các phương án $S = \{-3; 3\}$ và $S = \{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$.

Thay 4 vào phương trình không thỏa mãn nên loại phương án $S = \{4\}$.

Chọn phương án **B**. □

3. Phương pháp đặt ẩn phụ

3.78 (Đề chính thức 2017). Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 \geqslant 0$.

A. $S = (0; 2] \cup [16; +\infty)$. **B**. $S = (-\infty; 2) \cup [16; +\infty)$.

C. $S = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$. **D**. $S = [2; 16]$.

Lời giải.

C1: Bất phương trình tương đương với $\left[\begin{array}{l}\log_2 x \geqslant 4\\ \log_2 x \leqslant 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x \geqslant 16\\ 0 < x \leqslant 2\end{array}\right.$, suy ra $S = (0; 2] \cup [16; +\infty)$.

C2: Điều kiện $x > 0$, suy ra loại các phương án $S = (-\infty; 2) \cup [16; +\infty)$ và $S = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.
Nhập vào máy tính biểu thức $\log_2 x^2 - 5\log_2 x + 4$.
Nhấn CALC 1 = được kết quả dương nên loại phương án $S = [2; 16]$.

Chọn phương án **A.** □

3.79 (Đề chính thức 2017). Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - m\log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 = 81$.

A. $m = 4$. **B.** $m = 81$. **C.** $m = 44$. **D.** $m = -4$.

Lời giải.

Ta có $x_1x_2 = 81 \Rightarrow \log_3(x_1x_2) = \log_3 81$ hay $\log_3 x_1 + \log_3 x_2 = 4$.

Theo định lý Vi-ét ta có $\log_3 x_1 + \log_3 x_2 = m$, từ đó suy ra $m = 4$.

Chọn phương án **A.** □

3.80 (Đề tham khảo 2020). Cho phương trình $\log_2^2(2x) - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1; 2]$ là

A. $[1; 2]$. **B.** $(1; 2)$. **C.** $[2; +\infty)$. **D.** $[1; 2)$.

Lời giải.

Ký hiệu phương trình đã cho là (1), ta có

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow (1+\log_2 x)^2 - m\log_2 x - 2\log_2 x + m - 2 = 0\\ &\Leftrightarrow \log_2^2 x - 1 - m\log_2 x + m = 0\\ &\Leftrightarrow (\log_2 x - 1)(\log_2 x + 1) - m(\log_2 x - 1) = 0\\ &\Leftrightarrow (\log_2 x - 1)(\log_2 x + 1 - m) = 0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x = 1\\ \log_2 x = m-1\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 2 \in [1;2]\\ x = 2^{m-1}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc $[1; 2]$ khi và chỉ khi

$$1 \leqslant 2^{m-1} < 2 \Leftrightarrow 0 \leqslant m - 1 < 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant m < 2.$$

Chọn phương án **D.** □

3.81 (Đề chính thức 2019). Cho phương trình $\left(4\log_2^2 x + \log_2 x - 5\right)\sqrt{7^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 48. **B.** 49. **C.** 47. **D.** Vô số.

Lời giải.

Xét phương trình $\left(4\log_2^2 x + \log_2 x - 5\right)\sqrt{7^x - m} = 0$, với $m > 0$. (1)

Điều kiện xác định của phương trình $\begin{cases}x > 0\\ 7^x - m \geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x > 0\\ x \geqslant \log_7 m.\end{cases}$

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}4\log_2^2 x + \log_2 x - 5 = 0\\ \sqrt{7^x - m} = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x = 1\\ \log_2 x = -\dfrac{5}{4}\\ 7^x = m\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 2\\ x = \dfrac{1}{\sqrt[4]{32}}\\ x = \log_7 m.\end{array}\right.$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l}\log_7 m \leqslant 0\\ \dfrac{1}{\sqrt[4]{32}} \leqslant \log_7 m < 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0 < m \leqslant 1\\ 7^{\frac{1}{\sqrt[4]{32}}} \leqslant m < 7^2.\end{array}\right.$$

Do m là số nguyên dương nên suy ra $m = 1$ hoặc $m \in \{3, 4, 5, \ldots, 48\}$. Vậy, có tất cả 47 giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt.

Chọn phương án **C.** □

4. Phương pháp hàm số

3.82 (Đề tham khảo 2017). Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong đoạn $[-2017; 2017]$ để phương trình $\log(mx) = 2\log(x+1)$ có nghiệm duy nhất?

A. 4014. **B**. 4015. **C**. 2017. **D**. 2018.

Lời giải.

Ta có phương trình tương đương $\begin{cases} x+1>0 \\ mx = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ m = x + 2 + \dfrac{1}{x}. \end{cases}$

Xét hàm số $f(x) = x + 2 + \dfrac{1}{x}$ trên $(-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

Ta có $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Bảng biến thiên

x	-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$	||	$+\infty$ ↘	4	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi $\left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m < 0. \end{array}\right.$

Lại có $m \in [-2017; 2017]$ nên $\left[\begin{array}{l} m = 4 \\ -2017 \leqslant m < 0. \end{array}\right.$

Do đó có 2018 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án **D.** □

3.83 (Đề tham khảo 2017). Hỏi phương trình $3x^2 - 6x + \ln(x+1)^3 + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

A. 4. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 1.

Lời giải.

Ta có phương trình tương đương $3x^2 - 6x + 3\ln(x+1) + 1 = 0$.

Xét hàm số $y = 3x^2 - 6x + 3\ln(x+1) + 1$ trên $(-1; +\infty)$.

Ta có $y' = 6x - 6 + \dfrac{3}{x+1}$; $y' = 0 \Leftrightarrow 2(x-1) + \dfrac{1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Bảng biến thiên

x	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	y_1	↘	y_2	↗	$+\infty$

Ta có $y_1 > 0$ và $y_2 < 0$ nên từ bảng biến thiên suy ra phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Chọn phương án **B.** □

3.84 (Đề chính thức 2019). Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(3x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 3. **B**. 2. **C**. 4. **D**. Vô số.

Lời giải.

Điều kiện $x > \dfrac{1}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\log_3 x + \log_3 m = \log_3(3x-1) \Leftrightarrow mx = 3x - 1 \Leftrightarrow m = \frac{3x-1}{x}. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{3x-1}{x}$ trên khoảng $\left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$ có $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0, \forall x \in \left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$. Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	3

Từ bảng biến thiên, suy ra phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $m \in (0; 3)$. Vậy, có 2 giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm.
Chọn phương án **B.** □

3.85 (Đề chính thức 2018). Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-20; 20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 19. **B.** 9. **C.** 21. **D.** 20.

Lời giải.
Đặt $\log_5(x - m) = u \Leftrightarrow x - m = 5^u$, phương trình trở thành $\begin{cases} 5^x + m = u & (1) \\ 5^u + m = x. & (2) \end{cases}$
Trừ theo vế (1) và (2) ta có $5^x - 5^u = u - x \Leftrightarrow 5^x + x = 5^u + u.$ (3)
Xét hàm số $f(t) = 5^t + t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 5^t \ln 5 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Do đó (3) $\Leftrightarrow x = u \Leftrightarrow m = x - 5^x$.
Xét hàm số $g(x) = x - 5^x$ trên $\mathbb{R}$ có $g'(x) = 1 - 5^x \ln 5$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_5 \dfrac{1}{\ln 5} = x_0$.
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\log_5 \ln 5$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(x_0)$	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có nghiệm khi $m \leqslant g(x_0) \approx -0{,}917$.
Vì m nguyên thuộc $(-20; 20)$ nên ta có $m \in \{-19, -18, \ldots, -1\}$.
Vậy có 19 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn phương án **A.** □

3.86 (Đề chính thức 2020). Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(m; n)$ sao cho $m + n \leqslant 14$ và ứng với mỗi cặp $(m; n)$ tồn tại đúng 3 số thực $a \in (-1; 1)$ thỏa mãn $2a^m = n \ln\left(a + \sqrt{a^2 + 1}\right)$?

A. 14. **B.** 11. **C.** 13. **D.** 12.

Lời giải.
Ta có phương trình tương đương

$$\frac{2a^m}{n} = \ln\left(a + \sqrt{a^2+1}\right) \Leftrightarrow \frac{2a^m}{n} - \ln\left(a + \sqrt{a^2+1}\right) = 0. \quad (1)$$

Xét $f(x) = \dfrac{2x^m}{n} - \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ trên $(-1; 1)$ có $f'(x) = \dfrac{2m}{n} x^{m-1} - \dfrac{1}{\sqrt{x_1^2}}$.
Phương trình (1) có đúng 3 nghiệm trên $(-1; 1)$ nên $f'(x)$ có ít nhất 2 nghiệm trên $(-1; 1)$.
Xét $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x_1^2}}$ trên $(-1; 1)$ có $g'(x) = -\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Bảng biến thiên

x	-1		0		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Từ bảng biến thiên và $f'(x)$ có ít nhất 2 nghiệm trên $(-1; 1)$, suy ra $m-1$ chẵn, hay m lẻ.
Xét $h(x) = \dfrac{2m}{n}x^{m-1}$ với $m \in \{1, 3, \ldots, 13\}$.

<u>TH1</u>: $m = 1$, ta có $h(x) = \dfrac{2}{n}$, từ bảng biến thiên thứ nhất suy ra $f'(x)$ có đúng 2 nghiệm phân biệt trên $(-1; 1)$ khi và chỉ khi $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \dfrac{2}{n} < 1 \Leftrightarrow n = 3.$ (2)

<u>TH2</u>: $m \in \{3, 5, 7, 9, 11, 13\}$, ta có $h'(x) = \dfrac{2m(m-1)}{n}x^{m-2}$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Bảng biến thiên

x	-1		0		1
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$\frac{2m}{n}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{2m}{n}$

Từ hai bảng biến thiên suy ra $f'(x)$ có đúng 2 nghiệm phân biệt trên $(-1; 1)$ khi và chỉ khi $\dfrac{2m}{n} > \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2m \geqslant n.$ (3)

Khi đó $f'(x)$ có hai nghiệm trái dấu, giả sử x_1, x_2 thỏa mãn $-1 < x_1 < 0 < x_2 < 1$.
Bảng biến thiên

x	-1		x_1		0		x_2		1
$f'(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	

Do đó $f(x)$ có đúng 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f(1) > 0 \\ f(-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{n} - \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) > 0 \\ -\dfrac{2}{n} + \ln\left(-1 + \sqrt{2}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow n \leqslant 2. \qquad (4)$$

Kết hợp (2) và (4), không có cặp $(m; n)$ nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Kết hợp (3) và (4) ta có

- Với $n = 1 \Rightarrow m \in \{3, 5, 7, 9, 11, 13\} \Rightarrow$ có 6 cặp $(m; n)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Với $n = 2 \Rightarrow m \in \{3, 5, 7, 9, 11\} \Rightarrow$ có 5 cặp $(m; n)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy có tất cả 11 cặp $(m; n)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn phương án **B.** □

5. Phương trình, bất phương trình nhiều ẩn

3.87 (Đề tham khảo 2020). Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(2x + y)$. Giá trị của $\frac{x}{y}$ bằng

A. 2. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\log_{\frac{3}{2}} 2$.

Lời giải.

Đặt $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(2x + y) = t$, ta có $\begin{cases} x = 9^t & (1) \\ y = 6^t & (2) \\ 2x + y = 4^t. & (3) \end{cases}$

Thế (1), (2) vào (3) ta được

$$2 \cdot 9^t + 6^t = 4^t \Leftrightarrow 2\left(\frac{3}{2}\right)^{2t} + \left(\frac{3}{2}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{1}{2} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^t = -1 \quad \text{(vô nghiệm)}. \end{array}\right.$$

Vậy $\frac{x}{y} = \frac{9^t}{6^t} = \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{1}{2}$.

Chọn phương án **B.** □

3.88 (Đề tham khảo 2020). Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+y) = \log_4\left(x^2 + y^2\right)$?

A. 3. **B.** Vô số. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Điều kiện $x + y > 0$, $x^2 + y^2 \neq 0$.

Đặt $\log_3(x + y) = \log_4\left(x^2 + y^2\right) = t$, ta có $\begin{cases} x + y = 3^t \\ x^2 + y^2 = 4^t. \end{cases}$ (1)

Ta có $(x + y)^2 \leqslant 2\left(x^2 + y^2\right) \Rightarrow 9^t \leqslant 2 \cdot 4^t \Leftrightarrow t \leqslant \log_{\frac{9}{4}} 2$.

Khi đó $x^2 + y^2 = 4^t \leqslant 4^{\log_{\frac{9}{4}} 2} \approx 3{,}27$.

Vì x nguyên nên $x^2 \in \{0; 1\}$, suy ra $x \in \{0; -1; 1\}$.

- Với $x = 0$ thay vào (1), ta có $\begin{cases} y = 3^t \\ y^2 = 4^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ y = 1. \end{cases}$
- Với $t = 1$ thay vào (1), ta có $\begin{cases} y = 3^t - 1 \\ y^2 = 4^t - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ y = 0. \end{cases}$
- Với $x = -1$ thay vào (1), ta có $\begin{cases} y = 3^t + 1 \\ y^2 = 4^t - 1. \end{cases}$

  Từ đó suy ra
  $$\left(3^t + 1\right)^2 = 4^t - 1 \Leftrightarrow 9^t + 2 \cdot 3^t - 4^t + 2 = 0. \qquad (2)$$

  Đặt $f(t) = 9^t + 2 \cdot 3^t - 4^t + 2$, ta có

  - Với $t \geqslant 0$, suy ra $9^t \geqslant 4^t \Rightarrow f(t) > 0$.
  - Với $t < 0$, suy ra $4^t < 2 \Rightarrow f(t) > 0$.

  Do đó (2) vô nghiệm.

Vậy có 2 giá trị nguyên của x thỏa mãn yêu cầu bài toán là $x \in \{0; 1\}$.

Chọn phương án **C.** □

3.89 (Đề tham khảo 2020). Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leqslant x \leqslant 2020$ và $\log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y$?

A. 4. B. 2019. C. 6. D. 2020.

Lời giải.

Ta có $\log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y \Leftrightarrow \log_3(x+1) + x + 1 = \log_3 3^{2y} + 3^{2y}$. (1)

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ trên $(0; +\infty)$ có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 3} + 1 > 0,\ \forall t \in (0; +\infty)$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow f(x+1) = f\left(3^{2y}\right) \Leftrightarrow x + 1 = 3^{2y} \Leftrightarrow x = -1 + 3^{2y}$.

Mặt khác $0 \leqslant x \leqslant 2020$ nên $0 \leqslant -1 + 3^{2y} \leqslant 2020 \Leftrightarrow 1 \leqslant 9^y \leqslant 2021 \Leftrightarrow 0 \leqslant y \leqslant \log_9 2021$.

Vì y nguyên nên $y \in \{0; 1; 2; 3\} \Rightarrow x \in \{0; 8; 80; 728\}$.

Vậy có 4 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án **A.** □

3.90 (Đề chính thức 2017). Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \dfrac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = x + y$.

A. $P_{\min} = \dfrac{18\sqrt{11} - 29}{21}$. B. $P_{\min} = \dfrac{2\sqrt{11} - 3}{3}$.

C. $P_{\min} = \dfrac{9\sqrt{11} - 19}{9}$. D. $P_{\min} = \dfrac{9\sqrt{11} + 19}{9}$.

Lời giải.

Biến đổi điều kiện ta có $\log_3(1-xy) - \log_3(x+2y) = 3xy - 3 - 1 + x + 2y$.

Hay $\log_3(3-3xy) + 3 - 3xy = \log_3(x+2y) + x + 2y$. (1)

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ trên $(0; +\infty)$ có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 3} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow f(3-3xy) = f(x+2y) \Leftrightarrow 3 - 3xy = x + 2y \Leftrightarrow x = \dfrac{-2y+3}{3y+1} \Rightarrow P = \dfrac{-2y+3}{3y+1} + y$.

Xét hàm số $g(y) = \dfrac{-2y+3}{3y+1} + y$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có $g'(y) = -\dfrac{11}{(3y+1)^2} + 1$; $g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{-1+\sqrt{11}}{3} = y_0$. Bảng biến thiên

y	0		y_0		$+\infty$
$g'(y)$		$-$	0	$+$	
$g(y)$	3	$\searrow$	$g(y_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $P_{min} = g(y_0) = g\left(\dfrac{-1+\sqrt{11}}{3}\right) = \dfrac{2\sqrt{11} - 3}{3}$.

Chọn phương án **B.** □

3.91 (Đề chính thức 2018). Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{3a+2b+1}(9a^2+b^2+1) + \log_{6ab+1}(3a+2b+1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng

A. 9. B. $\dfrac{5}{2}$. C. 6. D. $\dfrac{7}{2}$.

Lời giải.

Ta có $a > 0, b > 0$ nên $\begin{cases} 3a + 2b + 1 > 1 \\ 9a^2 + b^2 + 1 > 1 \\ 6ab + 1 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) > 0 \\ \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) > 0. \end{cases}$

Do đó, áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta có

$$\begin{aligned} &\log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) + \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) \\ \geqslant\ & 2\sqrt{\log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) \cdot \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1)}. \end{aligned}$$

Hay $2 \geqslant 2\sqrt{\log_{6ab+1}(9a^2+b^2+1)} \Leftrightarrow \log_{6ab+1}(9a^2+b^2+1) \leqslant 1$.
Từ đó suy ra $9a^2+b^2+1 \leqslant 6ab+1 \Leftrightarrow (3a-b)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow 3a=b$.
Với $3a=b$, dấu bằng của bất đẳng thức đầu tiên đã xảy ra nên ta có

$$\begin{aligned} & \log_{3a+2b+1}(9a^2+b^2+1) = \log_{6ab+1}(3a+2b+1) = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \log_{3b+1}(2b^2+1) = \log_{2b^2+1}(3b+1) = 1. \end{aligned}$$

Hay $2b^2+1 = 3b+1 \Leftrightarrow 2b^2-3b=0 \Leftrightarrow b=\dfrac{3}{2}$ (vì $b>0$).
Vậy $a+2b=\dfrac{1}{2}+3=\dfrac{7}{2}$.
Chọn phương án **D.** □

3.92 (Đề chính thức 2020). Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $\log_4\left(x^2+y\right) \geqslant \log_3(x+y)$?

A. 116. **B.** 115. **C.** 58. **D.** 59.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^2+y>0 \\ x+y>0. \end{cases}$
Ta có $x^2 \geqslant x, \forall x \in \mathbb{Z}$, suy ra hàm số $f(y)=\log_4\left(x^2+y\right)-\log_3(x+y)$ xác định trên $\mathscr{D}=(-x;+\infty)$.
Khi đó $\log_4\left(x^2+y\right) \geqslant \log_3(x+y) \Leftrightarrow f(y) \geqslant 0$. (1)
Ta có $f'(y)=\dfrac{1}{\left(x^2+y\right)\ln 4}-\dfrac{1}{(x+y)\ln 3}=\dfrac{1}{\ln 3}\left(\dfrac{1}{\left(x^2+y\right)\log_3 4}-\dfrac{1}{x+y}\right) \leqslant 0,\ \forall x \in \mathscr{D}$.
Suy ra $f(y)$ nghịch biến trên $\mathscr{D}$.
Đặt $k=x+y$, suy ra $k \in \mathbb{Z}^+$.
Xét $g(k)=f(k-x)=\log_4\left(x^2+k-x\right)-\log_3 k$ xác định trên $(0;+\infty)$.
Do f nghịch biến trên $\mathscr{D}$ nên g cũng nghịch biến trên $(0;+\infty)$.
Ta có $g(1)=\log_4(x^2-x+1) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{Z}$.
Do đó với mỗi $x \in \mathbb{Z}$, xét trên tập số thực phương trình $g(k)=0$ luôn có nghiệm duy nhất $k_0 \in [1;+\infty)$, vì

- $\lim\limits_{k\to 0^+} g(k)=+\infty$ vì $\begin{cases} \lim\limits_{k\to 0^+}\log_4(x^2-x+k)=\log_4(x^2-x)>0 & \text{(hằng số theo } x \text{ nguyên)} \\ \lim\limits_{k\to 0^+}\log_3 k=-\infty. \end{cases}$
- $\lim\limits_{k\to+\infty} g(k)=\lim\limits_{k\to+\infty}\left[\left(\log_4(x^2-x+k)-\log_4 k\right)+\left(\log_4 k-\log_3 k\right)\right]=-\infty$ vì

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to+\infty}\log_4(x^2-x+k)-\log_4 k=\lim\limits_{k\to+\infty}\log_4\left(\dfrac{x^2-x}{k}+1\right)=\log_4 1=0. \\ \lim\limits_{k\to+\infty}\left(\log_4 k-\log_3 k\right)=\lim\limits_{k\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{\log_4 3}\right)\log_4 k=-\infty. \end{cases}$$

Khi đó với mọi $k \in \mathbb{Z}$ mà $1 \leqslant k \leqslant k_0$ thì $g(k) \geqslant g\left(k_0\right) \geqslant 0$, nên bất phương trình (1) có ít nhất k_0 nghiệm.
Suy ra yêu cầu bài toán tương đương với

$$\begin{aligned} g(728) \leqslant 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \log_4\left(x^2-x+728\right) \leqslant \log_3 728 \\ & \Leftrightarrow \quad x^2-x+728 \leqslant 4^{\log_3 728} \\ & \Leftrightarrow \quad -57 \leqslant x \leqslant 58 \quad \text{(vì } x \text{ nguyên).} \end{aligned}$$

Vậy $x \in \{-57;-56;\ldots;58\}$.
Khi đó có 116 giá trị x thỏa mãn bài toán.
Chọn phương án **A.** □

3.93 (Đề chính thức 2020). Xét các số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \leqslant \left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{4y}{2x+y+1}$ gần nhất với số nào dưới đây?

A. -3. B. -4. C. -2. D. -5.

Lời giải.
Ta có $2^{x^2+y^2+1} \leqslant \left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x \Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-2x+1} \leqslant x^2+y^2-2x+1+1$.
Đặt $t = x^2+y^2-2x+1 = (x-1)^2+y^2 \geqslant 0$, bất phương trình trở thành $2^t \leqslant t+1 \Leftrightarrow 2^t - t - 1 \leqslant 0$.(1)
Xét $f(t) = 2^t - t - 1$ trên $[0;+\infty)$ có $f'(t) = 2^t \ln 2 - 1$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \log_2 \dfrac{1}{\ln 2} = t_0$.
Lại có $f(1) = 0$, ta có bảng biến thiên

t	0		t_0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0		$+$		
$f(t)$	0	$\searrow$	$f(t_0)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra (1) $\Leftrightarrow t \leqslant 1 \Rightarrow (x-1)^2+y^2 \leqslant 1$. (2)
Do đó tập hợp các điểm thỏa mãn điều kiện đã cho là hình tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $R = 1$.
Xét đường thẳng $d\colon 2x+y+1 = 0$ có $\mathrm{d}(I,d) = \dfrac{3}{\sqrt{5}} > 1 = R$ nên $2x+y+1 \neq 0$, $\forall (x;y)$ thỏa mãn (2).
Khi đó, ta có

$$P = \frac{4y}{2x+y+1} \Leftrightarrow P(2x+y+1) = 4y \Leftrightarrow 2Px + (P-4)y + P = 0. \tag{3}$$

Tập hợp các điểm thỏa mãn (3) là đường thẳng $\Delta\colon 2Px+(P-4)y+P = 0$.
Do đó tồn tại $(x;y)$ khi và chỉ khi

$$\mathrm{d}(I,\Delta) \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{|3P|}{\sqrt{4P^2+(P-4)^2}} \leqslant 1 \Leftrightarrow 9P^2 \leqslant 5P^2 - 8P + 16 \Leftrightarrow -1-\sqrt{5} \leqslant P \leqslant -1+\sqrt{5}.$$

Vậy $\min P = -1-\sqrt{5}$ gần nhất với số -3.
Chọn phương án **A.** □

§6. Bài Toán Thực Tế

1. Bài toán lãi suất

3.94 (Đề tham khảo 2018). Một người gởi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,4%/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau đúng 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số nào dưới đây, nếu trong thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

A. 102.017.000 đồng. B. 102.424.000 đồng. C. 102.016.000 đồng. D. 102.423.000 đồng.

Lời giải.
Áp dụng công thức lãi kép ta có $T_6 = T(1+r)^6 = 100(1{,}004)^6 \approx 102{,}424$ triệu đồng.
Chọn phương án **B.** □

3.95 (Đề minh họa 2016). Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 12%/năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền m mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

A. $m = \dfrac{100 \times 1{,}03}{3}$ (triệu đồng). **B.** $m = \dfrac{100 \times (1{,}01)^3}{3}$ (triệu đồng).
C. $m = \dfrac{120 \times (1{,}12)^3}{(1{,}12)^3 - 1}$ (triệu đồng). **D.** $m = \dfrac{(1{,}01)^3}{(1{,}01)^3 - 1}$ (triệu đồng).

Lời giải.
Theo giả thiết $T = 100$ (triệu đồng) và $r = 0{,}01$.
Áp dụng công thức trả góp $m = \dfrac{Tr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$, ta có $m = \dfrac{(1{,}01)^3}{(1{,}01)^3 - 1}$ (triệu đồng).
Chọn phương án **D.** □

3.96 (Đề chính thức 2017). Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng bao gồm gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.
A. 12 năm. **B.** 11 năm. **C.** 13 năm. **D.** 14 năm.

Lời giải.
Áp dụng công thức lãi kép $T_n = T(1+r)^n$ ta có $100 = 50(1{,}06)^n \Leftrightarrow n = \log_{1{,}06} 2 \approx 11{,}9$.
Vậy sau ít nhất 12 năm thì người đó nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng.
Chọn phương án **A.** □

3.97 (Đề chính thức 2018). Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất 7,5 %/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền đã gửi, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?
A. 9 năm. **B.** 12 năm. **C.** 10 năm. **D.** 11 năm.

Lời giải.
Theo công thức lãi kép ta có $T_n = T(1+r)^n \Leftrightarrow (1+r)^n = \dfrac{T_n}{T} \Leftrightarrow n = \log_{(1+r)} \dfrac{T_n}{T}$.
Thay số vào ta được $n = \log_{1{,}075} 2 \approx 9{,}58$.
Vậy sau ít nhất 10 năm người ấy mới thu được số tiền nhiều gấp đôi số tiền vốn ban đầu.
Chọn phương án **C.** □

3.98 (Đề tham khảo 2019). Ông A vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 1 %/tháng. Ông ta muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là như nhau và ông A trả hết nợ sau đúng 5 năm kể từ ngày vay. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi số tiền mỗi tháng ông ta cần trả cho ngân hàng gần nhất với số tiền nào dưới đây?
A. 2,25 triệu đồng. **B.** 2,22 triệu đồng. **C.** 3,03 triệu đồng. **D.** 2,20 triệu đồng.

Lời giải.
Gọi số tiền ông A vay là T, lãi suất tháng là r, số tiền mỗi tháng ông A trả là m, số tháng ông A trả hết nợ là n.
Theo công thức trả góp ta có $m = \dfrac{Tr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$.
Thay $T = 100$, $r = 0{,}01$, $n = 60$ vào ta có $m = \dfrac{100 \times 0{,}01 \times (1{,}01)^{60}}{(1{,}01)^{60} - 1} \approx 2{,}22$ triệu đồng.
Chọn phương án **B.** □

2. Bài toán khác

3.99 (Đề tham khảo 2020). Để dự báo dân số của một quốc gia, người ta sử dụng công thức $S = Ae^{nr}$; trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Năm 2017, dân số Việt Nam là 93.671.600 người (Tổng cục Thống kê, Niên giám thống kê 2017, Nhà xuất bản Thống kê, Tr.79). Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là 0,81%, dự báo dân số Việt Nam năm 2035 là bao nhiêu người (kết quả làm tròn đến chữ số hàng trăm)?

A. 108.311.100. **B**. 109.256.100. **C**. 108.374.700. **D**. 107.500.500.

Lời giải.

Ta có $n = 2035 - 2017 = 18$.

Do đó $S = Ae^{nr} = 93.671.600 \cdot e^{18 \cdot 0,81\%} \approx 108.374.700$.

Vậy năm 2035, nước Việt Nam có khoảng 108.374.700 người.

Chọn phương án **C**. □

3.100 (Đề tham khảo 2020). Để quảng bá cho sản phẩm A, một công ty dự định tổ chức quảng cáo theo hình thức quảng cáo trên truyền hình. Nghiên cứu của công ty cho thấy: nếu sau n lần quảng cáo được phát thì tỷ lệ người xem quảng cáo đó mua sản phẩm A tuân theo công thức $P(n) = \dfrac{1}{1+49e^{-0,015n}}$. Hỏi cần phát ít nhất bao nhiêu lần quảng cáo để tỉ lệ người xem mua sản phẩm đạt trên 30%?

A. 206. **B**. 202. **C**. 203. **D**. 207.

Lời giải.

C1: Nhập vào máy tính biểu thức $\dfrac{1}{1+49e^{-0,015X}}$.
Dùng chức năng CALC dò các phương án từ bé đến lớn cho đến khi kết quả lớn hơn 30% thì chọn.

C2: Ta có

$$\begin{aligned} P(n) > 30\% \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+49e^{-0,015n}} > \frac{3}{10} \Leftrightarrow 1+49e^{-0,015n} < \frac{10}{3} \\ &\Leftrightarrow \quad e^{-0,015n} < \frac{1}{21} \Leftrightarrow -0,015n < \ln\frac{1}{21} \\ &\Leftrightarrow \quad n > -\frac{1}{0,015}\ln\frac{1}{21} \approx 203. \end{aligned}$$

Chọn phương án **C**. □

3.101 (Đề chính thức 2020). Năm 2020, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là 900.000.000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

A. 830.131.000 đồng. **B**. 797.258.000 đồng. **C**. 810.000.000 đồng. **D**. 813.529.000 đồng.

Lời giải.

Áp dụng công thức lãi kép $T_n = T(1+r)^n$ với $T = 900.000.000$, $r = -2\%$, $n = 2025 - 2020 = 5$, ta có

$$T_5 = 900.000.000 \cdot (1-2\%)^5 \approx 813.529.000 \text{ (đồng)}.$$

Chọn phương án **D**. □

3.102 (Đề thử nghiệm 2017). Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = s(0) \cdot 2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con?

A. 7 phút. **B**. 19 phút. **C**. 48 phút. **D**. 12 phút.

Lời giải.

Từ công thức $s(t) = s(0) \cdot 2^t$ ta có $s(0) = \dfrac{s(t)}{2^t} = \dfrac{s(3)}{2^3} = \dfrac{625000}{8} = 78125$.

Lại từ công thức $s(t) = s(0) \cdot 2^t$ ta có $2^t = \dfrac{s(t)}{s(0)} \Leftrightarrow 2^t = \log_2\dfrac{s(t)}{s(0)} = \log_2\dfrac{10000000}{78125} = 7$.

Chọn phương án **A**. □

3.103 (Đề chính thức 2020). Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 600 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1000 ha?

A. Năm 2028. **B**. Năm 2047. **C**. Năm 2046. **D**. Năm 2027.

Lời giải.
Áp dụng công thức lãi kép ta có diện tích rừng trồng mới sau n năm là

$$T_n = T_0(1+r)^n = 600(1+6\%)^n.$$

Do đó diện tích rừng trồng mới đạt trên 1000 ha khi và chỉ khi

$$600(1+6\%)^n > 1000 \Leftrightarrow n > \log_{1+6\%}\frac{1000}{600} \approx 8{,}77.$$

Vậy năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1000 ha là $2019+9=2028$.
Chọn phương án **A.** □

Chuyên đề 4

Mặt Nón, Mặt Trụ, Mặt Cầu

§1. Mặt Nón

1. Diện tích và thể tích

4.1 (Đề tham khảo 2020). Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh ℓ và bán kính đáy r bằng

A. $4\pi r\ell$. **B.** $2\pi r\ell$. **C.** $\pi r\ell$. **D.** $\frac{1}{3}\pi r\ell$.

Lời giải.
Công thức tính diện tích xung quanh của hình nón là $S_{\text{xq}} = \pi r\ell$.
Chọn phương án **C.** □

4.2 (Đề chính thức 2019). Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là

A. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. **B.** $\pi r^2 h$. **C.** $\frac{4}{3}\pi r^2 h$. **D.** $2\pi r^2 h$.

Lời giải.
Thể tích khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.
Chọn phương án **A.** □

4.3 (Đề minh họa 2016). Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại $A, AB = a$ và $AC = \sqrt{3}a$. Tính độ dài đường sinh l của hình nón, nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB.

A. $l = a$. **B.** $l = \sqrt{2}a$. **C.** $l = \sqrt{3}a$. **D.** $l = 2a$.

Lời giải.
Ta có độ dài đường sinh $l = BC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a$.
Chọn phương án **D.** □

4.4 (Đề chính thức 2020). Cho khối nón có bán kính đáy $r = 5$ và chiều cao $h = 2$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. 10π. **B.** $\frac{50\pi}{3}$. **C.** 10π. **D.** $\frac{10\pi}{3}$.

Lời giải.
Thể tích của khối nón đã cho là $V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h = \frac{50\pi}{3}$.
Chọn phương án **B.** □

4.5 (Đề tham khảo 2020). Cho khối nón có chiều cao $h = 3$ và bán kính đáy $r = 4$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. 16π. **B.** 4π. **C.** 48π. **D.** 36π.

Lời giải.
Từ công thức tính thể tích khối nón $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, ta có $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 3 = 16\pi$.
Chọn phương án **A.** □

4.6 (Đề chính thức 2020). Cho hình nón có bán kính đáy $r = 2$ và độ dài đường sinh $\ell = 5$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. 10π. **B.** 20π. **C.** $\frac{10\pi}{3}$. **D.** $\frac{20\pi}{3}$.

Lời giải.
Diện tích xung quanh của hình nón đã cho là $S_{\text{xq}} = \pi r\ell = \pi \cdot 2 \cdot 5 = 10\pi$.
Chọn phương án **A.** □

4.7 (Đề tham khảo 2019). Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng $2a$ và bán kính đáy bằng a. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $\dfrac{2\pi a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3}{3}$.

Lời giải.
Ta có chiều cao của khối nón là $h = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.
Vậy thể tích của khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi a^2 a\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$.
Chọn phương án **B.** □

4.8 (Đề tham khảo 2017). Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Tính độ dài đường sinh l của hình nón đã cho.

A. $l = \dfrac{\sqrt{5}a}{2}$. **B.** $l = 3a$. **C.** $l = \dfrac{3a}{2}$. **D.** $l = 2\sqrt{2}a$.

Lời giải.
Từ công thức $S_{\text{xq}} = \pi rl$ ta có $l = \dfrac{S_{\text{xq}}}{\pi r} = \dfrac{3\pi a^2}{\pi a} = 3a$.
Chọn phương án **B.** □

4.9 (Đề tham khảo 2018). Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Độ dài đường sinh của hình nón đã cho bằng

A. $\dfrac{3a}{2}$. **B.** $2a$. **C.** $3a$. **D.** $2\sqrt{2}a$.

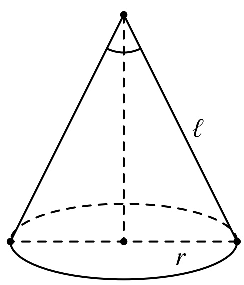
Lời giải.
Ta có $S_{xq} = \pi rl$, suy ra $l = \dfrac{S_{xq}}{\pi r} = \dfrac{3\pi a^2}{\pi a} = 3a$.
Chọn phương án **C.** □

4.10 (Đề chính thức 2020). Cho hình nón có bán kính đáy bằng 2 và góc ở đỉnh bằng $60°$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. 8π. **B.** $\dfrac{8\sqrt{3}\pi}{3}$. **C.** 16π. **D.** $\dfrac{16\sqrt{3}\pi}{3}$.

Lời giải.
Góc ở đỉnh của hình nón bằng $60°$ nên thiết diện qua trục là tam giác đều.
Do đó $\ell = 2r = 4$.
Vậy diện tích xung quanh của hình nón là

$$S_{\text{xq}} = \pi r\ell = \pi \cdot 2 \cdot 4 = 8\pi.$$



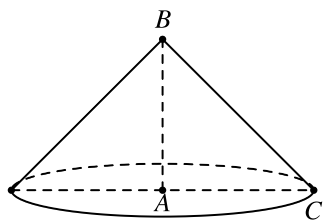
Chọn phương án **A.** □

4.11 (Đề tham khảo 2020). Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$ và $AC = 2a$. Khi quay tam giác ABC quanh cạnh góc vuông AB thì đường gấp khúc ACB tạo thành một hình nón. Diện tích xung quanh của hình nón đó bằng

A. $10\pi a^2$. **B.** $5\pi a^2$. **C.** $\sqrt{5}\pi a^2$. **D.** $2\sqrt{5}\pi a^2$.

Lời giải.
Hình nón có $h = AB = a$, $r = AC = 2a$, suy ra $\ell = \sqrt{h^2 + r^2} = a\sqrt{5}$.
Vậy diện tích xung quanh của hình nón là

$$S_{\text{xq}} = \pi r\ell = \pi \cdot 2a \cdot a\sqrt{5} = 2\sqrt{5}\pi a^2.$$



Chọn phương án **D.** □

4.12 (Đề thử nghiệm 2017). Cho khối (N) có bán kính đáy bằng 3 và diện tích xung quanh bằng 15π. Tính thể tích V của khối nón (N).

A. $V = 36\pi$. **B.** $V = 20\pi$. **C.** $V = 60\pi$. **D.** $V = 12\pi$.

Lời giải.

Gọi h, l, r lần lượt là chiều cao, đường sinh và bán kính đáy của (N).

Ta có $r = 3$, $S_{xq} = \pi rl \Rightarrow l = \dfrac{S_{xq}}{\pi r} = 5$, $h = \sqrt{l^2 - r^2} = 4$.

Vậy thể tích khối nón (N) là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = 12\pi$.

Chọn phương án **D.** □

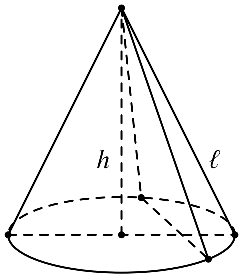
2. Thiết diện của hình nón

4.13 (Đề tham khảo 2020). Cho hình nón có chiều cao bằng $2\sqrt{5}$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều có diện tích bằng $9\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. 32π. **B.** $\dfrac{32\sqrt{5}\pi}{3}$. **C.** 96π. **D.** $32\sqrt{5}\pi$.

Lời giải.

Gọi ℓ là độ dài đường sinh của hình nón.



Ta có thiết diện là tam giác đều cạnh ℓ nên có diện tích $\dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$.

Từ giả thiết, suy ra $\dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \Leftrightarrow \ell^2 = 36 \Leftrightarrow \ell = 6$.

Khi đó bán kính đáy hình nón là $r = \sqrt{\ell^2 - h^2} = \sqrt{36 - 20} = 4$.

Vậy thể tích khối nón đã cho là $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 16 \cdot 2\sqrt{5} = \dfrac{32\sqrt{5}\pi}{3}$.

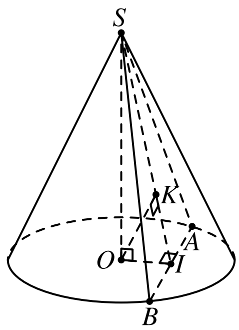
Chọn phương án **B.** □

4.14 (Đề chính thức 2017). Cho hình nón đỉnh S có chiều cao $h = a$ và bán kính đáy $r = 2a$. Mặt phẳng (P) đi qua S cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}a$. Tính khoảng cách d từ tâm của đường tròn đáy đến (P).

A. $d = \dfrac{\sqrt{5}a}{5}$. **B.** $d = a$. **C.** $d = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **D.** $d = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm đường tròn đáy, I là trung điểm AB và K là hình chiếu của O trên SI, ta có $\begin{cases} AB \perp OI \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOI)$.



Khi đó $\begin{cases} OK \perp SI \\ OK \perp AB \end{cases} \Rightarrow OK \perp (SAB)$, suy ra $OK = \mathrm{d}(O, (P))$.

Ta có $OI = \sqrt{OA^2 - IA^2} = a$, suy ra $OK = \dfrac{1}{2}SI = \dfrac{1}{2}\sqrt{SO^2 + OI^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn phương án **C.** □

3. Hình nón nội, ngoại tiếp đa diện

4.15 (Đề chính thức 2017). Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh đều bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối nón có đỉnh S và đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$.

A. $V = \dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{6}$. **B.** $V = \dfrac{\pi a^3}{2}$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{2}$. **D.** $V = \dfrac{\pi a^3}{6}$.

Lời giải.

Khối nón có đường tròn đáy nội tiếp tứ giác $ABCD$ nên có bán kính đáy $r = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi O là tâm đáy ta có $AO = \frac{1}{2}AC = a$, suy ra chiều cao $h = SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = a$.
Thể tích của khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{2a^2}{4} \cdot a = \frac{\pi a^3}{6}$.
Chọn phương án **D**. □

§2. Mặt Trụ

1. Diện tích và thể tích

4.16 (Đề tham khảo 2020). Diện tích xung quanh của hình trụ có độ dài đường sinh ℓ và bán kính đáy r bằng

A. $2\pi r\ell$. **B.** $4\pi r\ell$. **C.** $\pi r\ell$. **D.** $\frac{1}{3}\pi r\ell$.

Lời giải.
Công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{\text{xq}} = 2\pi r\ell$.
Chọn phương án **A**. □

4.17 (Đề chính thức 2020). Cho khối trụ có bán kính đáy $r = 4$ và chiều cao $h = 3$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. 48π. **B.** 16π. **C.** 24π. **D.** 4π.

Lời giải.
Thể tích của khối trụ đã cho là $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 3 = 48\pi$.
Chọn phương án **A**. □

4.18 (Đề chính thức 2020). Cho hình trụ có bán kính đáy $r = 8$ và độ dài đường sinh $\ell = 3$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 192π. **B.** 64π. **C.** 48π. **D.** 24π.

Lời giải.
Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho là $S_{xq} = 2\pi r\ell = 2\pi \cdot 8 \cdot 3 = 48\pi$.
Chọn phương án **C**. □

4.19 (Đề chính thức 2017). Tính thể tích V của khối trụ có bán kính đáy $r = 4$ và chiều cao $h = 4\sqrt{2}$.

A. $V = 32\sqrt{2}\pi$. **B.** $V = 128\pi$. **C.** $V = 64\sqrt{2}\pi$. **D.** $V = 32\pi$.

Lời giải.
Thể tích của khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 4\sqrt{2} = 64\sqrt{2}$.
Chọn phương án **C**. □

4.20 (Đề minh họa 2016). Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1$ và $AD = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN, ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đó.

A. $S_{\text{tp}} = 10\pi$. **B.** $S_{\text{tp}} = 4\pi$. **C.** $S_{\text{tp}} = 2\pi$. **D.** $S_{\text{tp}} = 6\pi$.

Lời giải.
Hình trụ có bán kính đáy $r = AM = 1$ và đường sinh $l = AB = 1$.
Diện tích xung quang của hình trụ là $S_{\text{xq}} = 2\pi rl = 2\pi$.
Diện tích đáy của hình trụ là $S_{\text{đ}} = \pi r^2 = \pi$.
Vậy diện tích toàn phần của hình trụ là $S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + 2S_{\text{đ}} = 4\pi$.
Chọn phương án **B**. □

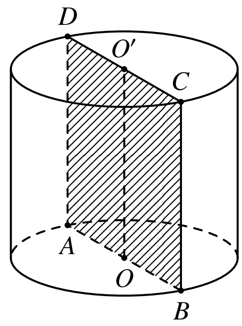
2. Thiết diện của hình trụ

4.21 (Đề chính thức 2020). Cắt hình trụ (T) bởi một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông cạnh bằng 7. Diện tích xung quanh của (T) bằng

A. $\frac{49\pi}{2}$. **B.** $\frac{49\pi}{4}$. **C.** 98π. **D.** 49π.

Lời giải.

Giả sử hình trụ (T) có trục OO' và thiết diện qua trục là $ABCD$ (xem hình bên).
Ta có $ABCD$ là hình vuông cạnh 7 nên $\ell = AD = 7$, $r = OA = \dfrac{7}{2}$.
Vậy diện tích xung quanh của (T) là $S_{\text{xq}} = 2\pi r\ell = 2\pi \cdot \dfrac{7}{2} \cdot 7 = 49\pi$.

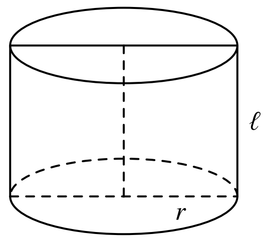


Chọn phương án **D.** □

4.22 (Đề tham khảo 2020). Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 3. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng qua trục, thiết diện thu được là một hình vuông. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 54π. **B.** 18π. **C.** 27π. **D.** 36π.

Lời giải.
Thiết diện qua trục là hình vuông nên độ dài đường sinh $\ell = 2r = 6$.
Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho là $S_{xq} = 2\pi r\ell = 2\pi \cdot 3 \cdot 6 = 36\pi$.

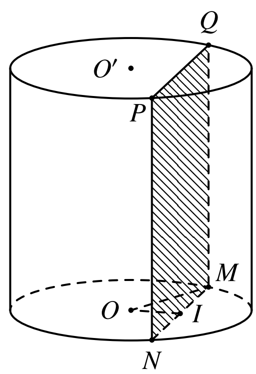


Chọn phương án **D.** □

4.23 (Đề chính thức 2019). Cho hình trụ có chiều cao bằng $5\sqrt{3}$. Cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng 30. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $20\sqrt{3}\pi$. **B.** $10\sqrt{39}\pi$. **C.** $5\sqrt{39}\pi$. **D.** $10\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.
Gọi $MNPQ$ là thiết diện thu được (như hình vẽ bên). Khi đó $MNPQ$ là hình chữ nhật và $MQ = 5\sqrt{3}$. Diện tích $MNPQ = 30$, suy ra $MN = \dfrac{30}{5\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$. Gọi I là trung điểm của MN, ta có $OI \perp MN$. Vì MQ song song với trục của hình trụ nên MQ vuông góc với hai mặt đáy của hình trụ, suy ra $MQ \perp OI$. Do đó $OI \perp (MNPQ)$, nên $OI = 1$, suy ra $OM = \sqrt{OI^2 + IM^2} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$.
Vậy, diện tích xung quanh của hình trụ đã cho là $S_{\text{xq}} = 2\pi \cdot 2 \cdot 5\sqrt{3} = 20\pi\sqrt{3}$.

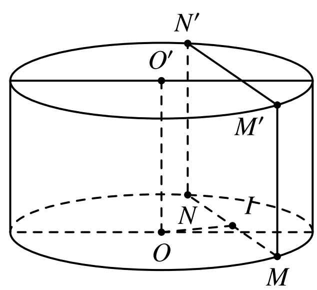


Chọn phương án **A.** □

4.24 (Đề tham khảo 2020). Cho hình trụ có chiều cao bằng $6a$. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$, thiết diện thu được là một hình vuông. Thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

A. $150\pi a^3$. **B.** $108\pi a^3$. **C.** $216\pi a^3$. **D.** $54\pi a^3$.

Lời giải.
Giả sử hình trụ có chiều cao OO' và thiết diện thu được khi cắt hình trụ bởi mặt phẳng song song trục là hình vuông $MNN'M'$ (như hình vẽ).
Gọi I trung điểm MN, ta có $OI \perp MN$ và $OI \perp MM'$, suy ra $OI \perp (MNN'M')$, hay $OI = \mathrm{d}(I, (MNN'M')) = 3a$.
Khi đó bán kính đáy hình trụ là $r = OM = \sqrt{OM^2 + IM^2} = 3a\sqrt{2}$.
Vậy thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 18a^2 \cdot 6a = 108\pi a^3$.



Chọn phương án **B.** □

3. Hình trụ nội, ngoại tiếp đa diện

4.25 (Đề tham khảo 2017). Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng a.

A. $V = \pi a^3$. **B.** $V = \dfrac{\pi a^3}{4}$. **C.** $V = \dfrac{\pi a^3}{2}$. **D.** $V = \dfrac{\pi a^3}{6}$.

Lời giải.

Khối trụ ngoại tiếp hình lập phương có chiều cao $h = a$; bán kính đáy $r = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Do đó thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \dfrac{\pi a^3}{2}$.

Chọn phương án **C.** □

4.26 (Đề thử nghiệm 2017). Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

A. $V = \dfrac{\pi a^2 h}{3}$. **B.** $V = \dfrac{\pi a^2 h}{9}$. **C.** $V = \dfrac{\pi a^2 h}{9}$. **D.** $V = 3\pi a^2 h$.

Lời giải.

Chiều cao khối trụ bằng chiều cao lăng trụ và bằng h.

Bán kính đáy r là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi O là trọng tâm tam giác ABC, ta có $r = OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \dfrac{\pi a^2 h}{3}$.

Chọn phương án **A.** □

4.27 (Đề tham khảo 2018). Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 4. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có một đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác BCD và chiều cao bằng chiều cao của tứ diện $ABCD$.

A. $S_{xq} = 8\sqrt{2}\pi$. **B.** $S_{xq} = \dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$. **C.** $S_{xq} = 8\sqrt{3}\pi$. **D.** $S_{xq} = \dfrac{16\sqrt{3}\pi}{3}$.

Lời giải.

Gọi O là trọng tâm $\triangle BCD$ và M trung điểm CD.

Bán kính đáy của hình trụ là $r = OM = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{6} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Chiều cao $h = AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$, suy ra đường sinh $l = h = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$.

Vậy diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi r l = \dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$.

Chọn phương án **B.** □

4. Bài toán thực tế về hình trụ

4.28 (Đề chính thức 2019). Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1 m và 1,2 m. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?

A. 2,2 m. **B.** 1,6 m. **C.** 1,8 m. **D.** 1,4 m.

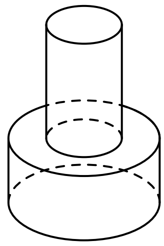
Lời giải.

Gọi h, R lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của bể nước dự định. Theo giả thiết ta có

$$\pi R^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot h + \pi \cdot (1{,}2)^2 \cdot h \Leftrightarrow R^2 = 1 + 1{,}44 \Rightarrow R \approx 1{,}6.$$

Chọn phương án **B.** □

4.29 (Đề tham khảo 2019). Một khối đồ chơi gồm hai khối trụ (H_1), (H_2) xếp chồng lên nhau, lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_2 = \frac{1}{2}r_1$, $h_2 = 2h_1$ (tham khảo hình vẽ). Biết rằng thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng 30cm^3, thể tích khối trụ (H_1) bằng



A. 24cm^3. **B**. 15cm^3. **C**. 20cm^3. **D**. 10cm^3.

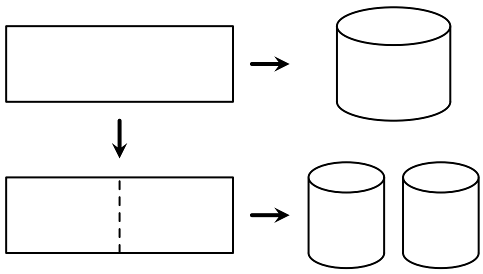
Lời giải.

Ta có $V_2 = h_2\pi r_2^2 = 2h_1\pi\frac{1}{4}r_1^2 = \frac{1}{2}h_1\pi r_1^2 = \frac{1}{2}V_1$.

Từ đó suy ra $V = V_1 + V_2 = V_1 + \frac{1}{2}V_1 = \frac{3}{2}V_1$. Do đó $V_1 = \frac{2}{3}V = \frac{2}{3}\cdot 30 = 20\ \left(\text{cm}^3\right)$.

Chọn phương án **C**. □

4.30 (Đề minh họa 2016). Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước 50 cm × 240 cm, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng 50 cm, theo hai cách sau (xem hình minh họa)



- Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.
- Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = 1$. **B**. $\frac{V_1}{V_2} = 4$. **C**. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$. **D**. $\frac{V_1}{V_2} = 2$.

Lời giải.

Thùng gò theo cách 1 có chu vi đáy 2,4 m nên có bán kính đáy $r = \frac{2{,}4}{2\pi} = \frac{1{,}2}{\pi}$.

Do đó thể tích của thùng gò theo cách 1 là $V_1 = \pi\cdot\left(\frac{1{,}2}{\pi}\right)^2\cdot 0{,}5 = \frac{0{,}72}{\pi}\ \left(\text{m}^3\right)$.

Mỗi thùng gò theo cách 2 có chu vi đáy 1,2 m nên có bán kính đáy $r = \frac{1{,}2}{2\pi} = \frac{0{,}6}{\pi}$.

Do đó tổng thể tích của hai thùng gò theo cách 2 là $V_2 = 2\pi\cdot\left(\frac{0{,}6}{\pi}\right)^2\cdot 0{,}5 = \frac{0{,}36}{\pi}\ \left(\text{m}^3\right)$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = 2$.

Chọn phương án **D**. □

4.31 (Đề chính thức 2018). Một chiếc bút chì khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy 3 mm và chiều cao bằng 200 mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn bán kính 1 mm. Giả định 1 m^3 gỗ có giá trị a (triệu đồng), 1 m^3 than chì có giá trị $8a$ (triệu đồng). Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $9{,}7a$ đồng. **B**. $97{,}03a$ đồng. **C**. $90{,}7a$ đồng. **D**. $9{,}07a$ đồng.

Lời giải.

Thể tích phần lõi được làm bằng than chì là $V_l = \pi R^2 h = \pi\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}2 = 0{,}2\cdot 10^{-6}\pi\ \text{m}^3$.

Thể tích toàn bộ chiếc bút chì là $V = Bh = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\left(3\cdot 10^{-3}\right)^2\cdot(0{,}2) = \frac{27\sqrt{3}}{10}\cdot 10^{-6}\ \text{m}^3$.

Thể tích phần thân bút chì được làm bằng gỗ $V_t = V - V_l = \frac{27\sqrt{3}}{10}\cdot 10^{-6} - 0{,}2\cdot 10^{-6}\pi\ \text{m}^3$.

Vậy giá nguyên vật liệu cần làm là

$$0{,}2 \cdot 10^{-6}\pi \cdot 8a + \left(\frac{27\sqrt{3}}{10} \cdot 10^{-6} - 0{,}2 \cdot 10^{-6}\pi\right) a \approx 9{,}07 \cdot 10^{-6}a \quad \text{(triệu đồng)}.$$

Chọn phương án **D.** □

§3. Mặt Cầu

1. Diện tích và thể tích

4.32 (Đề chính thức 2018). Diện tích mặt cầu bán kính R bằng

A. $2\pi R^2$. **B.** $\frac{4}{3}\pi R^2$. **C.** πR^2. **D.** $4\pi R^2$.

Lời giải.
Diện tích mặt cầu bán kính R bằng $4\pi R^2$.
Chọn phương án **D.** □

4.33 (Đề tham khảo 2019). Thể tích của khối cầu bán kính a bằng

A. $\frac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $2\pi a^3$. **C.** $\frac{\pi a^3}{3}$. **D.** $4\pi a^3$.

Lời giải.
Từ công thức tính thể tích khối cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, ta có $V = \frac{4\pi a^3}{3}$.
Chọn phương án **A.** □

4.34 (Đề chính thức 2020). Cho mặt cầu có bán kính $R = 4$. Diện tích của mặt cầu đã cho bằng

A. 64π. **B.** $\frac{256\pi}{3}$. **C.** $\frac{64\pi}{3}$. **D.** 16π.

Lời giải.
Diện tích của mặt cầu đã cho là $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 4^2 = 64\pi$.
Chọn phương án **A.** □

4.35 (Đề tham khảo 2020). Cho mặt cầu có bán kính $R = 2$. Diện tích của mặt cầu đã cho bằng

A. $\frac{32\pi}{3}$. **B.** 16π. **C.** 8π. **D.** 4π.

Lời giải.
Từ công thức tính diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2$, ta có $S = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi$.
Chọn phương án **B.** □

4.36 (Đề chính thức 2020). Cho khối cầu có bán kính $r = 4$. Thể tích của khối cầu đã cho bằng

A. $\frac{64\pi}{3}$. **B.** 64π. **C.** $\frac{256\pi}{3}$. **D.** 256π.

Lời giải.
Thể tích khối cầu đã cho là $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{256\pi}{3}$.
Chọn phương án **C.** □

2. Mặt cầu nội, ngoại tiếp đa diện

4.37 (Đề chính thức 2017). Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp một hình lập phương có cạnh bằng $2a$.

A. $R = \frac{\sqrt{3}a}{3}$. **B.** $R = 2\sqrt{3}a$. **C.** $R = \sqrt{3}a$. **D.** $R = a$.

Lời giải.
Hình lập phương cạnh $2a$ có đường chéo $2a\sqrt{3}$.
Suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp $R = \frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{3} = a\sqrt{3}$.
Chọn phương án **C.** □

4.38 (Đề thử nghiệm 2017). Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$ và $AA' = 2a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$.

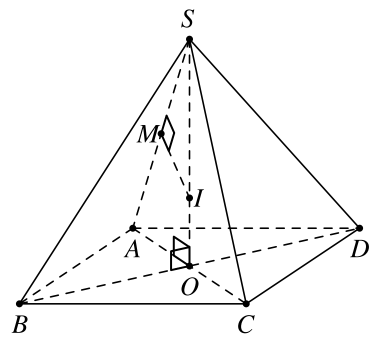
A. $R = 2a$. **B.** $R = 3a$. **C.** $R = \dfrac{3a}{4}$. **D.** $R = \dfrac{3a}{2}$.

Lời giải.
Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$ cũng chính là mặt cầu ngoại tiếp hình hộp.
Do đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$ là $r = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2} = \dfrac{3a}{2}$.
Chọn phương án **D.** □

4.39 (Đề tham khảo 2017). Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $3\sqrt{2}a$, cạnh bên bằng $5a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $R = \sqrt{3}a$. **B.** $R = \dfrac{25a}{8}$. **C.** $R = 2a$. **D.** $R = \sqrt{2}a$.

Lời giải.
Gọi O là tâm đáy ta có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{25a^2 - 9a^2} = 4a$.
Gọi M là trung điểm SA, kẻ $MI \perp SA, I \in SO$.
Ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.
Khi đó $\triangle SMI \sim \triangle SOA$, suy ra $\dfrac{SI}{SA} = \dfrac{SM}{SO}$.
Từ đó ta có $R = SI = \dfrac{SM \cdot SA}{SO} = \dfrac{25a}{8}$.

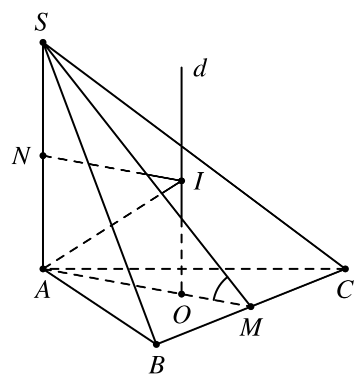


Chọn phương án **B.** □

4.40 (Đề chính thức 2020). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $4a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt đáy bằng $60°$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $84\pi a^2$. **B.** $\dfrac{172\pi a^2}{9}$. **C.** $\dfrac{76\pi a^2}{3}$. **D.** $\dfrac{172\pi a^2}{3}$.

Lời giải.
Gọi M là trung điểm BC, ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$.
Do đó góc giữa (SBC) và mặt phẳng đáy bằng $\widehat{SMA} = 60°$.
Tam giác SAM vuông tại A có $SA = AM \cdot \tan 60° = 2a\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6a$.
Gọi O là trọng tâm $\triangle ABC$, qua O dựng d song song SA, ta có $d \perp (ABC)$.
Gọi N trung điểm SA, dựng $NI \perp SA, I \in d$, ta có I tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.
Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là



$$R = IA = \sqrt{NA^2 + NI^2} = \sqrt{(3a)^2 + \left(\frac{4a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{129}}{3}.$$

Vậy diện tích mặt cầu ngoài tiếp hình chóp $S.ABC$ là $S = 4\pi R^2 = \dfrac{172\pi a^2}{3}$.
Chọn phương án **D.** □

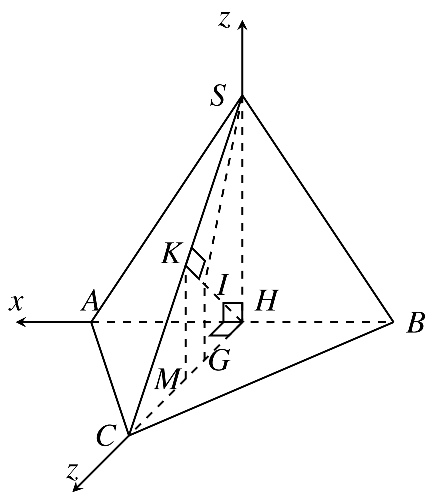
4.41 (Đề minh họa 2016). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V = \dfrac{5\pi}{3}$. **B.** $V = \dfrac{4\sqrt{3}\pi}{27}$. **C.** $V = \dfrac{5\sqrt{15}\pi}{54}$. **D.** $V = \dfrac{5\sqrt{15}\pi}{18}$.

Lời giải.

<u>C1</u>: Gọi H trung điểm AB ta có $SH \perp (ABC)$.

Tam giác SHC vuông cân tại H có $SC = \sqrt{SH^2 + CH^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.
Gọi K trung điểm SC có $HK \perp SC$ và $HK = \frac{1}{2}SC = \frac{\sqrt{6}}{4}$.
Gọi G trọng tâm $\triangle ABC$, kẻ $IG \perp CH, I \in HK$, ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.
Gọi M trung điểm CH ta có $KM \parallel IG$, suy ra $\frac{KI}{KH} = \frac{MG}{MH} = \frac{1}{3}$, suy ra $KI = \frac{1}{3}KH = \frac{\sqrt{6}}{12}$.
Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $R = SI = \sqrt{SK^2 + IK^2} = \frac{\sqrt{15}}{6}$.
Vậy thể tích mặt cầu là $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right)^3 = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$.



C2: Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ.
Ta có $A\left(\frac{1}{2};0;0\right), B\left(-\frac{1}{2};0;0\right), C\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right), S\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
Gọi $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ $(a^2 + b^2 + c^2 > d)$.

Ta có hệ $$\begin{cases} \frac{1}{4} - a + d = 0 \\ \frac{1}{4} + a + d = 0 \\ \frac{3}{4} - \sqrt{3}b + d = 0 \\ \frac{3}{4} - \sqrt{3}c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ c = \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ d = -\frac{1}{4} \end{cases}$$ (thỏa mãn).

Suy ra bán kính mặt cầu là $R = \sqrt{0 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{6}$.
Vậy thể tích mặt cầu là $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right)^3 = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$.

Chọn phương án **C.** □

3. Bài toán tổng hợp khối tròn xoay

4.42 (Đề chính thức 2020). Cho hình nón (N) có đỉnh S, bán kính bằng $\sqrt{2}a$ và độ dài đường sinh bằng $4a$. Gọi (T) là mặt cầu đi qua đỉnh S và đường tròn đáy của (N). Bán kính của (T) bằng

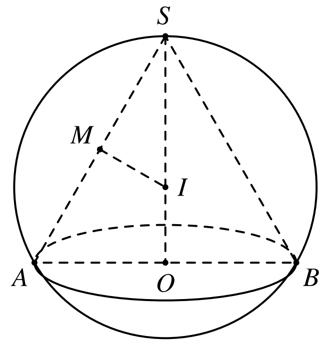
A. $\frac{4\sqrt{2}a}{3}$. **B.** $\frac{4\sqrt{14}a}{7}$. **C.** $\sqrt{14}a$. **D.** $\frac{8\sqrt{14}a}{7}$.

Lời giải.

C1: Chiều cao của hình nón là $h = \sqrt{\ell^2 - r^2} = a\sqrt{14}$.

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón là $R = \dfrac{\ell^2}{2h} = \dfrac{16a^2}{2a\sqrt{14}} = \dfrac{4a\sqrt{14}}{7}$.

C2: Gọi O là tâm đáy hình trụ, AB là một đường kính đáy.

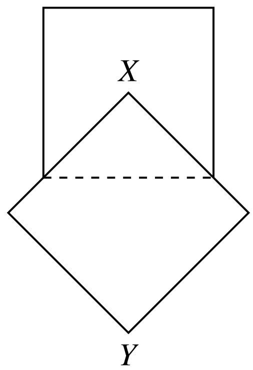


Gọi M là trung điểm AB, kẻ $MI \perp SA, I \in SO$, ta có I là tâm mặt cầu (T).

Ta có $\triangle SMI \backsim \triangle SOA \Rightarrow SI = \dfrac{SM \cdot SA}{SO} = \dfrac{2a \cdot 4a}{\sqrt{16a^2 - 2a^2}} = \dfrac{4a\sqrt{14}}{7}$.

Chọn phương án **B.** □

4.43 (Đề thử nghiệm 2017). Cho hai hình vuông có cùng cạnh bằng 5 được xếp chồng lên nhau sao cho đỉnh X của một hình vuông là tâm của hình vuông còn lại (như hình vẽ). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên xung quanh trục XY.



A. $V = \dfrac{125\left(5 + 4\sqrt{2}\right)\pi}{24}$.

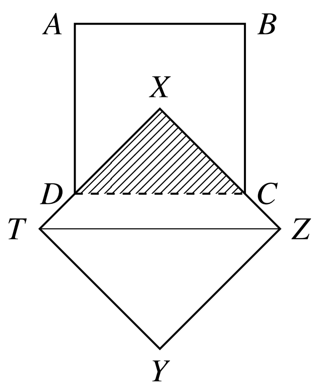
B. $V = \dfrac{125\left(5 + 2\sqrt{2}\right)\pi}{12}$.

C. $V = \dfrac{125\left(2 + \sqrt{2}\right)\pi}{4}$.

D. $V = \dfrac{125\left(1 + \sqrt{2}\right)\pi}{6}$.

Lời giải.

Ký hiệu các đỉnh như hình vẽ và V_H là thể tích khối tròn xoay khi quay hình (H) xung quanh trục XY. Ta có



$$V_{ABCD} = \pi r^2 h = \pi\frac{CD^2}{4}.AD = \frac{125\pi}{4}$$

$$V_{XZT} = V_{YZT} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\frac{ZT^2}{4} \cdot \frac{XY}{2} = \frac{125\pi\sqrt{2}}{6}$$

$$V_{XCD} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\frac{CD^2}{4}\sqrt{XC^2 - \frac{CD^2}{4}} = \frac{125\pi}{24}$$

Vậy $V = V_{ABCD} + 2V_{XZT} - V_{XCD} = \dfrac{125\left(5 + 4\sqrt{2}\right)\pi}{24}$.

Chọn phương án **A.** □

Chuyên đề 5

Nguyên Hàm, Tích Phân Và Ứng Dụng

§1. Nguyên Hàm

1. Định nghĩa, tính chất

5.1 (Đề tham khảo 2020). Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

A. $F'(x) = -f(x), \forall x \in K$. **B.** $f'(x) = -F(x), \forall x \in K$.

C. $F'(x) = f(x), \forall x \in K$. **D.** $f'(x) = F(x), \forall x \in K$.

Lời giải.

Theo định nghĩa nguyên hàm, ta có $F'(x) = f(x), \forall x \in K$.

Chọn phương án **C.** □

2. Nguyên hàm cơ bản

5.2 (Đề chính thức 2020). $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $3x^3 + C$. **B.** $\dfrac{1}{3}x^3 + C$. **C.** $x^3 + C$. **D.** $2x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C$.

Chọn phương án **B.** □

5.3 (Đề chính thức 2020). $\displaystyle\int 5x^4\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $20x^3 + C$. **B.** $x^5 + C$. **C.** $\dfrac{1}{5}x^5 + C$. **D.** $5x^5 + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int 5x^4\,\mathrm{d}x = 5 \cdot \frac{x^5}{5} + C = x^5 + C$.

Chọn phương án **B.** □

5.4 (Đề chính thức 2019). Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 5$ là

A. $x^2 + 5x + C$. **B.** $2x^2 + 5x + C$. **C.** $x^2 + C$. **D.** $2x^2 + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int (2x+5)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 5x + C = x^2 + 5x + C$.

Chọn phương án **A.** □

5.5 (Đề tham khảo 2018). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

A. $x^3 + x + C$. **B.** $\dfrac{x^3}{3} + x + C$. **C.** $6x + C$. **D.** $x^3 + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \left(3x^2 + 1\right)\mathrm{d}x = x^3 + x + C$.

Chọn phương án **A.** □

5.6 (Đề chính thức 2018). Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x$ là

A. $x^3 + x + C$. **B.** $x^4 + x^2 + C$. **C.** $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$. **D.** $3x^2 + 1 + C$.

Lời giải.

Ta có $\int (x^3 + x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$.

Chọn phương án **C.** □

5.7 (Đề tham khảo 2019). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x + x$ là

A. $\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^2 + C$. **B.** $\frac{1}{x+1}\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^2 + C$. **C.** $\mathrm{e}^x + 1 + C$. **D.** $\mathrm{e}^x + x^2 + C$.

Lời giải.

Ta có $\int (\mathrm{e}^x + x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + \frac{x^2}{2} + C$.

Chọn phương án **A.** □

5.8 (Đề tham khảo 2020). Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + 6x$ là

A. $-\sin x + C$. **B.** $-\sin x + 3x^2 + C$. **C.** $\sin x + 6x^2 + C$. **D.** $\sin x + 3x^2 + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (\cos x + 6x)\,\mathrm{d}x = \sin x + 3x^2 + C$.

Chọn phương án **D.** □

5.9 (Đề tham khảo 2017). Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$.

Lời giải.

Ta có $\int \left(x^2 + \frac{2}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$.

Chọn phương án **D.** □

3. Phương pháp đổi biến

5.10 (Đề chính thức 2017). Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$.

A. $\int \cos 3x\,\mathrm{d}x = \sin 3x + C$. **B.** $\int \cos 3x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin 3x}{3} + C$.

C. $\int \cos 3x\,\mathrm{d}x = -\frac{\sin 3x}{3} + C$. **D.** $\int \cos 3x\,\mathrm{d}x = 3\sin 3x + C$.

Lời giải.

C1: Sử dụng công thức $\int \cos ax\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin ax + C$, ta chọn được phương án $\int \cos 3x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin 3x}{3} + C$.

C2: Bấm máy $\cos 3x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin 3x}{3}\right)\Big|_{x=X}$.

Nhập CALC 2 = được kết quả ≈ 0 nên chọn phương án $\int \cos 3x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin 3x}{3} + C$.

Chọn phương án **B.** □

5.11 (Đề thử nghiệm 2017). Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -2\sin 2x + C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\sin 2x + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sin 2x + C$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\int \cos(Ax + B)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{A}F(x) + C$, ta có $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

Chọn phương án **C.** □

5.12 (Đề minh họa 2016). Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x = \int (2x-1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$.

Chọn phương án **A.** □

5.13 (Đề tham khảo 2020). Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ là

A. $x - \frac{3}{(x-1)^2} + C$. **B.** $x - 3\ln(x-1) + C$. **C.** $x + 3\ln(x-1) + C$. **D.** $x + \frac{3}{(x-1)^2} + C$.

Lời giải.

Xét trên $(1;+\infty)$ ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{x+2}{x-1}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{3}{x-1}\right)\mathrm{d}x = x + 3\ln(x-1) + C$.

Chọn phương án **C.** □

5.14 (Đề chính thức 2019). Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ trên khoảng $(-1;+\infty)$ là

A. $2\ln(x+1) - \frac{2}{x+1} + C$. **B.** $2\ln(x+1) + \frac{2}{x+1} + C$.

C. $2\ln(x+1) - \frac{3}{x+1} + C$. **D.** $2\ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C$.

Lời giải.

Ta có

$$f(x) = \frac{2(x+1)-3}{(x+1)^2} = \frac{2}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2}.$$

Do đó, trên $(-1;+\infty)$, ta có

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{3}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = 2\ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C.$$

Chọn phương án **D.** □

4. Nguyên hàm thỏa mãn điều kiện cho trước

5.15 (Đề thử nghiệm 2017). Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$. Tính $F(3)$.

A. $F(3) = \ln 2 + 1$. **B.** $F(3) = \frac{7}{4}$. **C.** $F(3) = \frac{1}{2}$. **D.** $F(3) = \ln 2 - 1$.

Lời giải.

C1: Ta có $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \ln|x-1| + C$.

Lại có $F(2) = 1 \Leftrightarrow \ln 1 + C = 1 \Leftrightarrow C = 1$. Suy ra $F(x) = \ln|x-1| + 1$. Vậy $F(3) = \ln 2 + 1$.

C2: Ta có $\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_2^3 = F(3) - F(2)$.

Từ đó suy ra $F(3) = F(2) + \int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 1 + \int\limits_2^3 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = 1 + \ln 2$.

Chọn phương án **A.** □

5.16 (Đề chính thức 2017). Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5\sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $f(x) = 3x + 5\cos x + 2$. **B.** $f(x) = 3x + 5\cos x + 5$.
C. $f(x) = 3x - 5\cos x + 15$. **D.** $f(x) = 3x - 5\cos x + 2$.

Lời giải.
Vì $(\cos x)' = -\sin x$ nên lấy đạo hàm các phương án ta loại được các phương án $f(x) = 3x-5\cos x+2$ và $f(x) = 3x - 5\cos x + 15$.
Xét phương án $f(x) = 3x + 5\cos x + 5$, ta có $f(0) = 0 + 5\cos 0 + 5 = 10$, thỏa mãn nên chọn phương án $f(x) = 3x + 5\cos x + 5$.
Chọn phương án **B.** □

5.17 (Đề chính thức 2018). Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\dfrac{2}{9}$ và $f'(x) = 2x\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\dfrac{2}{15}$. **B.** $-\dfrac{35}{36}$. **C.** $-\dfrac{19}{36}$. **D.** $-\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.
Từ giả thiết ta có $\dfrac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2} = 2x \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{f(x)}\right)' = -2x \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} = -x^2 + C$ hay $f(x) = \dfrac{1}{C - x^2}$.
Lại có $f(2) = -\dfrac{2}{9} \Leftrightarrow C = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow f(x) = -\dfrac{2}{1 + 2x^2}$. Vậy $f(1) = -\dfrac{2}{3}$.
Chọn phương án **D.** □

5.18 (Đề tham khảo 2018). Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{2}{2x - 1}$, $f(0) = 1$ và $f(1) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

A. $2 + \ln 15$. **B.** $4 + \ln 15$. **C.** $\ln 15$. **D.** $3 + \ln 15$.

Lời giải.
Ta có $f(x) = \displaystyle\int \dfrac{2}{2x - 1}\mathrm{d}x = \ln|2x - 1| + C$.
Với $x > \dfrac{1}{2}$, ta có $f(x) = \ln(2x - 1) + C$, hơn nữa $f(1) = 2 \Leftrightarrow C = 2$.
Với $x < \dfrac{1}{2}$, ta có $f(x) = \ln(1 - 2x) + C$, hơn nữa $f(0) = 1 \Leftrightarrow C = 1$.
Do đó $f(x) = \begin{cases} \ln(2x - 1) + 2 & \text{nếu } x > \dfrac{1}{2} \\ \ln(1 - 2x) + 1 & \text{nếu } x < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$
Từ đó suy ra $f(-1) + f(3) = \ln 3 + 1 + \ln 5 + 2 = 3 + \ln 15$.
Chọn phương án **D.** □

5. Phương pháp nguyên hàm từng phần

5.19 (Đề tham khảo 2019). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x(1 + \ln x)$ là

A. $2x^2\ln x + 3x^2$. **B.** $2x^2\ln x + 3x^2 + C$. **C.** $2x^2\ln x + x^2 + C$. **D.** $2x^2\ln x + x^2$.

Lời giải.
Loại ngay phương án $2x^2\ln x + 3x^2$ và $2x^2\ln x + x^2$ vì không có C.
Gọi $I = \displaystyle\int 4x(1 + \ln x)\,\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = 1 + \ln x \\ \mathrm{d}v = 4x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = 2x^2. \end{cases}$
Ta có $I = 2x^2(1 + \ln x) - \displaystyle\int 2x\,\mathrm{d}x = 2x^2 + 2x^2\ln x - x^2 + C = 2x^2\ln x + x^2 + C$.
Chọn phương án **C.** □

5.20 (Đề chính thức 2020). Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x + 1)f'(x)$ là

A. $\dfrac{x+2}{2\sqrt{x^2+2}}+C$. **B.** $\dfrac{x^2+2x-2}{2\sqrt{x^2+2}}+C$. **C.** $\dfrac{2x^2+x+2}{\sqrt{x^2+2}}+C$. **D.** $\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}+C$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$, ta có

$$\int g(x)\,dx = (x+1)f(x) - \int f(x)\,dx = \frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+2}} - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\,dx = \frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+2}} - I_1.$$

Đặt $u = \sqrt{x^2+2} \Leftrightarrow u^2 = x^2+2 \Rightarrow udu = xdx$, ta có

$$I_1 = \int \frac{1}{u}\cdot u\,du = u + C = \sqrt{x^2+2}+C.$$

Vậy $\displaystyle\int g(x)\,dx = \frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+2}} - \sqrt{x^2+2} + C = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}+C$.

Chọn phương án **D.** □

5.21 (Đề chính thức 2017). Cho $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

A. $\int f'(x)e^{2x}dx = -x^2+2x+C$. **B.** $\int f'(x)e^{2x}dx = -2x^2+2x+C$.

C. $\int f'(x)e^{2x}dx = 2x^2-2x+C$. **D.** $\int f'(x)e^{2x}dx = -x^2+x+C$.

Lời giải.

Theo giả thiết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của $f(x)e^{2x}$ nên $F'(x) = f(x)e^{2x}$ hay $2x = f(x)e^{2x}$.

Đặt $\begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2e^{2x}dx \\ v = f(x) \end{cases}$, ta có

$$\int f'(x)e^{2x}\,dx = f(x)e^{2x} - \int f(x)\cdot 2e^{2x}\,dx = 2x - 2\int f(x)e^{2x}\,dx = 2x - 2x^2 + C.$$

Chọn phương án **B.** □

5.22 (Đề tham khảo 2020). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^x$ là

A. $-\sin 2x + \cos 2x + C$. **B.** $-2\sin 2x - \cos 2x + C$.

C. $-2\sin 2x + \cos 2x + C$. **D.** $2\sin 2x - \cos 2x + C$.

Lời giải.

Vì $\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$ nên $f(x)e^x = (\cos 2x)' = -2\sin 2x$.

Ta cần tính $I = f'(x)e^x\,dx$.

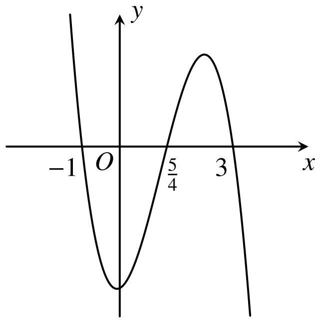
Đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = f(x) \end{cases}$, ta có

$$I = f(x)e^x - \int f(x)e^x\,dx = -2\sin 2x - \cos 2x + C.$$

Chọn phương án **B.** □

6. Ứng dụng của nguyên hàm

5.23 (Đề tham khảo 2019). Cho hàm số $f(x) = mx^4+nx^3+px^2+qx+r$ $(m,n,p,q,r \in \mathbb{R})$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tập nghiệm của phương trình $f(x) = r$ có số phần tử là



A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải.
Từ hình vẽ ta thấy $f'(x)$ có 3 nghiệm $x=-1$, $x=\frac{5}{4}$, $x=3$.
Do đó $f'(x)=m(x+1)(4x-5)(x-3)=m\left(4x^3-13x^2-2x+15\right)$.
Từ đó suy ra $f(x)=m\left(x^4-\frac{13}{3}x^3-x^2+15x\right)+r$.

Khi đó $f(x)=r\Leftrightarrow m\left(x^4-\frac{13}{3}x^3-x^2+15x\right)=0\Leftrightarrow x\left(x^3-\frac{13}{3}-x+15\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\frac{5}{3}\\x=3.\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x)=r$ có 3 phần tử.
Chọn phương án **A.** □

§2. Tích Phân

1. Định nghĩa, tính chất

5.24 (Đề thử nghiệm 2017). Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;2]$, $f(1)=1$ và $f(2)=2$. Tính $I=\int\limits_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=3$. **D.** $I=\frac{7}{2}$.

Lời giải.
Theo định nghĩa tích phân ta có $I=\int\limits_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\Big|_1^2=f(2)-f(1)=2-1=1$.
Chọn phương án **A.** □

5.25 (Đề tham khảo 2020). Nếu $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=4$ thì $\int\limits_0^1 2f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 8. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 16.

Lời giải.
Ta có $\int\limits_0^1 2f(x)\,\mathrm{d}x=2\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=2\cdot 4=8$.
Chọn phương án **A.** □

5.26 (Đề chính thức 2020). Biết $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=3$. Giá trị của $\int\limits_1^3 2f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải.
Ta có $\int\limits_1^3 2f(x)\,\mathrm{d}x=2\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=2\cdot 3=6$.
Chọn phương án **C.** □

5.27 (Đề tham khảo 2020). Nếu $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=-2$ và $\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x=1$ thì $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** -1. **C.** 1. **D.** -3.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -2 + 1 = -1.$

Chọn phương án **B.** □

5.28 (Đề chính thức 2020). Biết $\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ và $\int\limits_2^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Khi đó $\int\limits_2^3 \left[f(x) - g(x)\right]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -3. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_2^3 \left[f(x) - g(x)\right]\,\mathrm{d}x = \int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_2^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 4 - 1 = 3.$

Chọn phương án **C.** □

5.29 (Đề chính thức 2019). Biết $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -2$ và $\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 3$, khi đó $\int\limits_0^1 \left[f(x) - g(x)\right]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** -5. **C.** -1. **D.** 5.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 \left[f(x) - g(x)\right]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = -2 - 3 = -5.$

Chọn phương án **B.** □

5.30 (Đề tham khảo 2019). Cho $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 5$, khi đó $\int\limits_0^1 \left[f(x) - 2g(x)\right]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** -3. **C.** -8. **D.** 12.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 \left[f(x) - 2g(x)\right]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 2 - 2\cdot 5 = -8.$

Chọn phương án **C.** □

5.31 (Đề chính thức 2020). Biết $\int\limits_0^1 \left[f(x) + 2x\right]\,\mathrm{d}x = 2$. Khi đó $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 \left[f(x) + 2x\right]\,\mathrm{d}x = 2 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 2x\,\mathrm{d}x = 2 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + 1 = 2 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$

Chọn phương án **A.** □

5.32 (Đề chính thức 2020). Cho hàm số $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int\limits_1^2 \left[2 + f(x)\right]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{13}{3}$. **B.** 5. **C.** 3. **D.** $\dfrac{7}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^2 \left[2 + f(x)\right]\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 2\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2x\Big|_1^2 + x^2\Big|_1^2 = 2 + 3 = 5.$

Chọn phương án **B.** □

2. Tích phân cơ bản

5.33 (Đề chính thức 2018). $\int\limits_1^2 \mathrm{e}^{3x-1}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{3}(\mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^2)$. **B.** $\frac{1}{3}(\mathrm{e}^5 + \mathrm{e}^2)$. **C.** $\mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^2$. **D.** $\frac{1}{3}\mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^2$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^2 \mathrm{e}^{3x-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x-1}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}(\mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^2)$.

Chọn phương án **A.** □

5.34 (Đề tham khảo 2018). Tích phân $\int\limits_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+3}$ bằng

A. $\frac{16}{225}$. **B.** $\ln\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{2}{15}$. **D.** $\log\frac{5}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+3} = \ln|x+3|\big|_0^2 = \ln\frac{5}{3}$.

Chọn phương án **D.** □

5.35 (Đề tham khảo 2020). Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 0$ và $f'(x) = \cos x \cos^2 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{149}{225}$. **B.** $\frac{1042}{225}$. **C.** $\frac{242}{225}$. **D.** $\frac{208}{225}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x\frac{1+\cos 4x}{2} = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos x\cos 4x \\ &= \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}(\cos 3x + \cos 5x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos 5x. \end{aligned}$$

Suy ra $f(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{1}{20}\sin 5x + C$.

Mặt khác $f(0) = 0$ nên $C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{1}{20}\sin 5x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy

$$\begin{aligned} \int\limits_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^\pi \left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{1}{20}\sin 5x\right)\mathrm{d}x \\ &= \left(-\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{36}\cos 3x - \frac{1}{100}\cos 5x\right)\Bigg|_0^\pi \\ &= \frac{242}{225}. \end{aligned}$$

Chọn phương án **C.** □

5.36 (Đề chính thức 2019). Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2\cos^2 x + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{\pi^2+16\pi+4}{16}$. **B.** $\dfrac{\pi^2+16\pi+16}{16}$. **C.** $\dfrac{\pi^2+14\pi}{16}$. **D.** $\dfrac{\pi^2+4}{16}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=2\cos^2 x+1=\cos 2x+2, \forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra

$$f(x)=\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int(\cos 2x+2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin 2x+2x+C.$$

Từ $f(0)=4$, suy ra $C=4$. Vậy

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}\sin 2x+2x+4\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{4}\cos 2x+x^2+4x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{16}+\pi+\frac{1}{4}.$$

Chọn phương án **A.** □

5.37 (Đề tham khảo 2018). Biết $\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ với a,b,c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=18$. **B.** $P=12$. **C.** $P=24$. **D.** $P=46$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}.\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}.\sqrt{x+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Do đó

$$\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}=\int_1^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}x=\int_1^2\left(x^{-\frac{1}{2}}+(x+1)^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}\right)\Big|_1^2=4\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2=\sqrt{32}-\sqrt{12}-2.$$

Từ đó suy ra $a=32, b=12, c=2$. Vậy $P=32+12+2=46$.

Chọn phương án **D.** □

3. Phương pháp đổi biến

5.38 (Đề thử nghiệm 2017). Cho $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x=16$. Tính $I=\displaystyle\int_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=32$. **B.** $I=8$. **C.** $I=16$. **D.** $I=4$.

Lời giải.

Đặt $u=2x\Rightarrow \mathrm{d}u=2\mathrm{d}x$. Đổi cận $x=0\Rightarrow u=0; x=2\Rightarrow u=4$.

Ta có $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^4 f(u)\,\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x=8$.

Chọn phương án **B.** □

5.39 (Đề chính thức 2017). Cho $\displaystyle\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x=12$. Tính $I=\displaystyle\int_0^2 f(3x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=4$. **B.** $I=36$. **C.** $I=6$. **D.** $I=2$.

Lời giải.

Đặt $u=3x\Rightarrow \mathrm{d}u=3\mathrm{d}x$. Đổi cận $x=0\Rightarrow u=0,\ x=2\Rightarrow u=6$.

Ta có $I=\displaystyle\int_0^6 f(u)\frac{1}{3}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{3}\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x=4$.

Chọn phương án **A.** □

5.40 (Đề tham khảo 2020). Xét $\displaystyle\int_0^2 xe^{x^2}\,dx$, nếu đặt $u = x^2$ thì $\displaystyle\int_0^2 xe^{x^2}\,dx$ bằng

A. $2\displaystyle\int_0^4 e^u\,du$. **B.** $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 e^u\,du$. **C.** $2\displaystyle\int_0^2 e^u\,du$. **D.** $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^4 e^u\,du$.

Lời giải.
Đặt $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$.
Đổi cận $x = 0 \Rightarrow u = 0$, $x = 2 \Rightarrow u = 4$, ta có

$$\int_0^2 xe^{x^2}\,dx = \int_0^4 e^u \cdot \frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int_0^4 e^u\,du.$$

Chọn phương án **D.** □

5.41 (Đề tham khảo 2017). Tính tích phân $I = \displaystyle\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}\,dx$ bằng cách đặt $u = x^2 - 1$, mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $I = \displaystyle\int_1^2 \sqrt{u}\,du$. **B.** $I = \displaystyle\int_0^3 \sqrt{u}\,du$. **C.** $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^2 \sqrt{u}\,du$. **D.** $I = 2\displaystyle\int_0^3 \sqrt{u}\,du$.

Lời giải.
Đặt $u = x^2 - 1 \Rightarrow du = 2\,dx$. Đổi cận $x = 1 \Rightarrow u = 0$; $x = 2 \Rightarrow u = 3$. Ta có $I = \displaystyle\int_0^3 \sqrt{u}\,du$.

Chọn phương án **B.** □

5.42 (Đề chính thức 2020). Biết $F(x) = e^x + x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\displaystyle\int f(2x)\,dx$ bằng

A. $2e^x + 4x^2 + C$. **B.** $\dfrac{1}{2}e^{2x} + x^2 + C$. **C.** $2e^x + 2x^2 + C$. **D.** $\dfrac{1}{2}e^{2x} + 2x^2 + C$.

Lời giải.
Đặt $u = 2x \Rightarrow du = 2dx$, ta có

$$\int f(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int f(u)\,du = \frac{1}{2}\left(e^u + u^2\right) + C = \frac{1}{2}e^{2x} + 2x^2 + C.$$

Chọn phương án **D.** □

5.43 (Đề tham khảo 2020). Cho hàm số $f(x)$ có $f(3) = 3$ và $f'(x) = \dfrac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}$, $\forall x > 0$. Khi đó $\displaystyle\int_3^8 f(x)\,dx$ bằng

A. $\dfrac{197}{6}$. **B.** $\dfrac{29}{2}$. **C.** 7. **D.** $\dfrac{181}{6}$.

Lời giải.
Ta có $f(x) = \displaystyle\int f'(x)\,dx = \int \frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}\,dx$.
Đặt $u = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow u^2 = x + 1 \Rightarrow 2udu = dx$, ta có

$$f(x) = \int \frac{u^2-1}{u^2-u}2u\,du = 2\int (u+1)\,du = u^2 + 2u + C = x + 1 + 2\sqrt{x+1} + C.$$

Lại có $f(3) = 3 \Leftrightarrow 8 + C = 3 \Leftrightarrow C = -5 \Rightarrow f(x) = x + 2\sqrt{x+1} - 4$.

Vậy $\displaystyle\int_3^8 f(x)\,dx = \int_3^8 \left(x + 2\sqrt{x+1} - 4\right)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}(x+1)\sqrt{x+1} - 4x\right]\Bigg|_3^8 = \frac{197}{6}$.

Chọn phương án **A.** □

5.44 (Đề minh họa 2016). Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\pi} \cos^3 x \sin x \, dx$.

A. $I = -\pi^4$. **B.** $I = 0$. **C.** $I = -\frac{1}{4}\pi^4$. **D.** $I = -\frac{1}{4}$.

Lời giải.
Sử dụng máy tính tính được $I = 0$.
Chọn phương án **B.** □

5.45 (Đề tham khảo 2017). Cho $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} = a + b \ln \frac{1 + e}{2}$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S = a^3 + b^3$.

A. $S = 1$. **B.** $S = -2$. **C.** $S = 0$. **D.** $S = 2$.

Lời giải.
Gọi $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$, ta có $I = \int\limits_0^1 \frac{e^x \, dx}{e^x(e^x + 1)}$.
Đặt $u = e^x \Rightarrow du = e^x \, dx$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow u = 1; x = 1 \Rightarrow u = e$.
Ta có $I = \int\limits_1^e \frac{1}{u(u+1)} \, du = \int\limits_1^e \frac{u + 1 - u}{u(u+1)} \, du = \int\limits_1^e \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du = \ln \frac{u}{u+1}\Big|_1^e = 1 - \ln \frac{e+1}{2}$.
Từ đó suy ra $a = 1; b = -1$. Vậy $S = 1^3 + (-1)^3 = 0$.
Chọn phương án **C.** □

4. Phương pháp tích phân từng phần

5.46 (Đề minh họa 2016). Tính tích phân $I = \int\limits_1^e x \ln x \, dx$.

A. $I = \frac{e^2 - 2}{2}$. **B.** $I = \frac{1}{2}$. **C.** $I = \frac{e^2 - 1}{4}$. **D.** $I = \frac{e^2 + 1}{4}$.

Lời giải.
Sử dụng máy tính tính I lưu vào biến A. Nhập A trừ các đáp án được kết quả 0 thì chọn.
Chọn phương án **D.** □

5.47 (Đề tham khảo 2017). Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 (x+1)f'(x) \, dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $I = \int\limits_0^1 f(x) \, dx$.

A. $I = -8$. **B.** $I = -12$. **C.** $I = 12$. **D.** $I = 8$.

Lời giải.
Đặt $\begin{cases} u = x + 1 \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x). \end{cases}$
Ta có $\int\limits_0^1 (x+1)f'(x) \, dx = (x+1)f(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 f(x) \, dx \Leftrightarrow 10 = 2f(1) - f(0) - I \Leftrightarrow I = -8$.
Chọn phương án **A.** □

5.48 (Đề chính thức 2019). Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(4) = 1$ và $\int\limits_0^1 x f(4x) \, dx =$

1, khi đó $\int\limits_0^4 x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 14. **B.** 8. **C.** -16. **D.** $\dfrac{31}{2}$.

Lời giải.

Đặt $t = 4x \Rightarrow \mathrm{d}t = 4\mathrm{d}x$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = 1 \Rightarrow t = 4$. Ta có

$$\int\limits_0^1 xf(4x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^4 \frac{t}{4}\cdot f(t)\cdot\frac{1}{4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{16}\int\limits_0^4 xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

Từ đó suy ra $\int\limits_0^4 xf(x)\,\mathrm{d}x = 16$.

Xét tích phân $I = \int\limits_0^4 x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ \mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$, ta có

$$I = x^2 f(x)\Big|_0^4 - \int\limits_0^4 2xf(x)\,\mathrm{d}x = 4^2\cdot f(4) - 2\cdot 16 = -16.$$

Chọn phương án **C.** □

5. Phương pháp đồng nhất hệ số

5.49 (Đề tham khảo 2019). Cho $\int\limits_0^1 \dfrac{x\,\mathrm{d}x}{(x+2)^2} = a + b\ln 2 + c\ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a + b + c$ bằng

A. 1. **B.** -2. **C.** 2. **D.** -1.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{x}{(x+2)^2} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{(x+2)^2} = \dfrac{Ax + 2A + B}{(x+2)^2}$.

Đồng nhất hệ số ta được $\begin{cases} A = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -2. \end{cases}$

Khi đó $\int\limits_0^1 \dfrac{x\,\mathrm{d}x}{(x+2)^2} = \int\limits_0^1 \left[\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{2}{(x+2)^2}\right]\mathrm{d}x = \ln|x+2|\Big|_0^1 + \dfrac{2}{x+2}\Big|_0^1 = \ln 3 - \ln 2 - \dfrac{1}{3}$.

Từ đó suy ra $a = -\dfrac{1}{3}, b = -1, c = 1$. Vậy $3a + b + c = -1$.

Chọn phương án **D.** □

5.50 (Đề thử nghiệm 2017). Biết $\int\limits_3^4 \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2 + x} = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = 0$. **B.** $S = 2$. **C.** $S = 6$. **D.** $S = -2$.

Lời giải.

C1: Ta có $\int\limits_3^4 \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+x} = \int\limits_3^4 \dfrac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int\limits_3^4 \dfrac{x+1-x}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int\limits_3^4 \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$.

Suy ra $\int\limits_3^4 \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+x} = (\ln|x| - \ln|x+1|)\Big|_3^4 = (\ln 4 - \ln 5) - (\ln 3 - \ln 4) = 4\ln 2 - \ln 3 - \ln 5$.

Do đó $a = 4, b = -1, c = -1$. Vậy $S = a + b + c = 2$.

C2: Đặt $I = \int\limits_3^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + x}$, ta có $I = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5 \Leftrightarrow \mathrm{e}^I = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$.

Sử dụng máy tính tính được $\mathrm{e}^I = \frac{16}{15} = 2^4 \cdot 3^{-1} \cdot 5^{-1}$. Từ đó suy ra $a = 4, b = -1, c = -1$.
Vậy $S = a + b + c = 2$.

C3: Đặt $I = \int\limits_3^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + x}$. Ta có $S = a + b + c \Leftrightarrow c = S - a - b$.

Khi đó $I = a\ln 2 + b\ln 3 + (S - a - b)\ln 5 \Leftrightarrow I = a\ln\frac{2}{5} + b\ln\frac{3}{5} + S\ln 5 \Leftrightarrow b = \frac{I - S\ln 5 - a\ln\frac{2}{5}}{\ln\frac{3}{5}}$.

Sử dụng máy tính chọn MODE 7.

Nhập vào máy biểu thức $f(X) = \frac{I - 2\ln 5 - X\ln\frac{2}{5}}{\ln\frac{3}{5}}$ (kiểm tra phương án $S = 6$).

Chọn STAR = -9, END = 9, STEP =1, dò được kết quả nguyên $f(4) = -1$.
Từ đó suy ra $a = 4, b = -1, c = -1$. Vậy $S = a + b + c = 2$.

Chọn phương án **B.** □

5.51 (Đề chính thức 2018). Cho $\int\limits_{16}^{55} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+9}} = a\ln 2 + b\ln 5 + c\ln 11$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $a + b = 3c$. **B.** $a + b = c$. **C.** $a - b = -3c$. **D.** $a - b = -c$.

Lời giải.
Đặt $u = \sqrt{x+9} \Leftrightarrow u^2 = x + 9 \Rightarrow 2u\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$.
Đổi cận $x = 16 \Rightarrow u = 5; x = 55 \Rightarrow u = 8$, ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_{16}^{55} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+9}} &= \int\limits_5^8 \frac{2u\mathrm{d}u}{(u^2-9)u} = 2\int\limits_5^8 \frac{\mathrm{d}u}{u^2-9} = \frac{1}{3}\left(\int\limits_5^8 \frac{\mathrm{d}u}{u-3} - \int\limits_5^8 \frac{\mathrm{d}u}{u+3}\right)\\ &= \frac{1}{3}(\ln|u-3| - \ln|u+3|)\Big|_5^8 = \frac{2}{3}\ln 2 + \frac{1}{3}\ln 5 - \frac{1}{3}\ln 11.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}, c = -\frac{1}{3}$. Vậy $a - b = -c$.
Chọn phương án **D.** □

6. Tích phân hàm ẩn

5.52 (Đề tham khảo 2017). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2\cos 2x}, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = -6$. **B.** $I = 6$. **C.** $I = -2$. **D.** $I = 0$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Đặt $u = -x \Rightarrow \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$. Đổi cận $x = -\dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow u = \dfrac{3\pi}{2}; x = 0 \Rightarrow u = 0.$

Ta có $\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{0} f(-u)\,\mathrm{d}u = \int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(-u)\,\mathrm{d}u = \int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)\,\mathrm{d}x.$

Khi đó $I = \int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} [f(-x) + f(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2 + 2\cos 2x}\,\mathrm{d}x.$

Sử dụng máy tính tính được $I = 6$.

Chọn phương án **B.** □

5.53 (Đề tham khảo 2020). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $xf\left(x^3\right) + f\left(1 - x^2\right) = -x^{10} + x^6 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\dfrac{17}{20}$. **B.** $\dfrac{17}{4}$. **C.** $-\dfrac{13}{4}$. **D.** -1.

Lời giải.

C1: Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$xf\left(x^3\right) + f\left(1 - x^2\right) = -x^{10} + x^6 - 2x \Rightarrow x^2 f\left(x^3\right) + xf\left(1 - x^2\right) = -x^{11} + x^7 - 2x^2. \quad (1)$$

Lấy tích phân cận từ 0 đến 1 cả hai vế của (1), ta có

$$\begin{aligned}
& \int\limits_0^1 x^2 f\left(x^3\right)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 xf\left(1 - x^2\right)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(-x^{11} + x^7 - 2x^2\right)\,\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{3}\int\limits_0^1 f\left(x^3\right)\,\mathrm{d}\left(x^3\right) - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f\left(1 - x^2\right)\,\mathrm{d}\left(1 - x^2\right) = -\frac{5}{8} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{3}\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{5}{8} \\
\Leftrightarrow\ & \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Lấy tích phân cận từ -1 đến 0 cả hai vế của (1), ta có

$$\int_{-1}^{0} x^2 f\left(x^3\right)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} x f\left(1-x^2\right)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}\left(-x^{11}+x^7-2x^2\right)\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} f\left(x^3\right)\,\mathrm{d}\left(x^3\right) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} f\left(1-x^2\right)\,\mathrm{d}\left(1-x^2\right) = -\frac{17}{24}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{17}{24}$$

$$\Leftrightarrow\ \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = 3\left[-\frac{17}{24}+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\right] = -\frac{13}{4}.$$

Vậy $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{13}{4}$.

C2: Từ giả thiết suy ra $f(x)$ là hàm số bậc ba có dạng $f(x) = -x^3 + bx^2 + cx + d$.
Cho $x = 0$, ta có $f(1) = 0 \Rightarrow b + c + d = 1$.
Cho $x = 1$, ta có $f(1) + f(0) = -2 \Leftrightarrow f(0) = -2 \Rightarrow d = -2 \Rightarrow b + c = 3$. (2)
Cho $x = -1$, ta có $-f(-1) + f(0) = 2 \Leftrightarrow f(-1) = -4 \Rightarrow 1 + b - c + d = -4 \Rightarrow b - c = -3$. (3)
Từ (2) và (3) ta có $b = 0$, $c = 3$, suy ra $f(x) = -x^3 + 3x - 2$.
Vậy $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}\left(-x^3+3x-2\right)\,\mathrm{d}x = -\frac{13}{4}$.

Chọn phương án **C.** □

5.54 (Đề tham khảo 2018). Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$, $\displaystyle\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x = 7$ và $\displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$. Tích phân $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{7}{4}$. **C.** 1. **D.** $\frac{7}{5}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = x^2\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$.

Ta có $\displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3 f(x)}{3}\right|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x$.

Theo giả thiết có $\displaystyle -\frac{1}{3}\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x = -1$.

Do đó ta cần tìm k sao cho $\displaystyle I = \int_0^1 \left(f'(x) + kx^3\right)^2\mathrm{d}x = 0$.

Ta có $\displaystyle I = \int_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x + 2k\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x + k^2\int_0^1 x^6\mathrm{d}x = 7 - 2k + \left.\frac{k^2x^7}{7}\right|_0^1 = 7 - 2k + \frac{k^2}{7} \Leftrightarrow k = 7$.

Khi đó $f'(x) = -7x^3 \Rightarrow f(x) = -\dfrac{7x^4}{4} + C$. Lại có $f(1) = 0$ nên $C = \dfrac{7}{4}$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{7}{4}\int\limits_0^1 \left(x^4-1\right)\,\mathrm{d}x = \dfrac{7}{5}$.
Chọn phương án **D.** □

§3. Ứng Dụng Của Tích Phân

1. Diện tích hình phẳng

5.55 (Đề chính thức 2018). Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

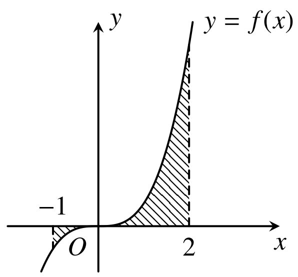
A. $S = \pi\int\limits_0^2 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$. **B.** $S = \pi\int\limits_0^2 \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$. **C.** $S = \int\limits_0^2 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$. **D.** $S = \int\limits_0^2 \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng đã cho được tính theo công thức $S = \int\limits_0^2 |\mathrm{e}^x|\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Chọn phương án **D.** □

5.56 (Đề tham khảo 2017). Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$ (như hình vẽ bên). Đặt $a = \int\limits_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$, $b = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



A. $S = b + a$. **B.** $S = b - a$. **C.** $S = -b + a$. **D.** $S = -b - a$.

Lời giải.
Theo hình vẽ ta có $f(x) < 0, \forall x \in (-1; 0)$ và $f(x) > 0, \forall x \in (0; 2)$.

Do đó $S = \int\limits_{-1}^0 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^2 |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^0 [-f(x)]\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -a + b$.
Chọn phương án **B.** □

5.57 (Đề chính thức 2020). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 4$ và $y = 2x - 4$ bằng

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** 36. **C.** 36π. **D.** $\dfrac{4\pi}{3}$.

Lời giải.
Phương trình hoành độ giao điểm

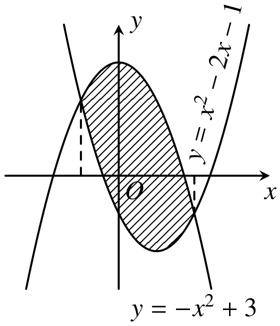
$$x^2 - 4 = 2x - 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 4$ và $y = 2x - 4$ là

$$S = \int\limits_0^2 \left|x^2 - 4 - (2x - 4)\right|\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \left|x^2 - 2x\right|\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \left(2x - x^2\right)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}.$$

Chọn phương án **A.** □

5.58 (Đề tham khảo 2019). Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int\limits_{-1}^{2} (-2x + 2)\, dx$.

B. $\int\limits_{-1}^{2} \left(-2x^2 + 2x + 4\right)\, dx$.

C. $\int\limits_{-1}^{2} (2x - 2)\, dx$.

D. $\int\limits_{-1}^{2} \left(2x^2 - 2x - 4\right)\, dx$.

Lời giải.

Từ hình vẽ, ta có $S = \int\limits_{-1}^{2} \left[\left(-x^2 + 3\right) - \left(x^2 - 2x - 1\right)\right]\, dx = \int\limits_{-1}^{2} \left(-2x^2 + 2x + 4\right)\, dx$.

Chọn phương án **B.** □

5.59 (Đề tham khảo 2020). Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x^2$, $y = -1$, $x = 0$ và $x = 1$ được tính bởi công thức nào dưới đây?

A. $S = \int\limits_{0}^{1} \left(2x^2 - 1\right)\, dx$.

B. $S = \pi \int\limits_{0}^{1} \left(2x^2 + 1\right)\, dx$.

C. $S = \int\limits_{0}^{1} \left(2x^2 + 1\right)\, dx$.

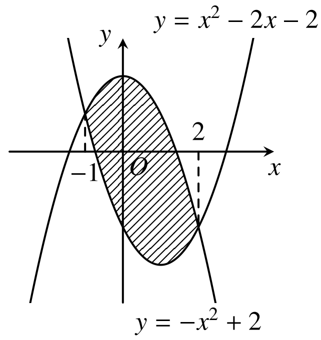
D. $S = \int\limits_{0}^{1} \left(2x^2 + 1\right)^2\, dx$.

Lời giải.
Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int\limits_{0}^{2} \left|2x^2 - (-1)\right|\, dx = \int\limits_{0}^{1} \left(2x^2 + 1\right)\, dx.$$

Chọn phương án **C.** □

5.60 (Đề tham khảo 2020). Diện tích phần hình phẳng được gạch chéo trong hình bên bằng



A. $\int\limits_{-1}^{2} \left(-2x^2 - 2x + 4\right)\, dx$.

B. $\int\limits_{-1}^{2} \left(-2x^2 + 2x + 4\right)\, dx$.

C. $\int\limits_{-1}^{2} \left(2x^2 - 2x - 4\right)\, dx$.

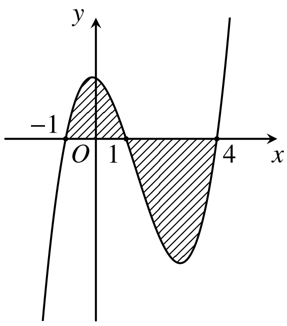
D. $\int\limits_{-1}^{2} \left(2x^2 + 2x - 4\right)\, dx$.

Lời giải.
Từ hình vẽ, suy ra diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ là

$$S = \int\limits_{-1}^{2} \left[\left(-x^2 + 2\right) - \left(x^2 - 2x - 2\right)\right]\, dx = \int\limits_{-1}^{2} \left(-2x^2 + 2x + 4\right)\, dx.$$

Chọn phương án **B.** □

5.61 (Đề chính thức 2019). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 0$, $x = -1$ và $x = 4$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



A. $S = -\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx - \int\limits_{1}^{4} f(x)\,dx$. **B.** $S = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int\limits_{1}^{4} f(x)\,dx$.

C. $S = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx - \int\limits_{1}^{4} f(x)\,dx$. **D.** $S = -\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int\limits_{1}^{4} f(x)\,dx$.

Lời giải.
Từ hình vẽ, ta thấy trên $f(x) > 0, \forall x \in (-1; 1)$ và $f(x) < 0, \forall x \in (1; 4)$, do đó

$$S = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx - \int\limits_{1}^{4} f(x)\,dx.$$

Chọn phương án **C.** □

5.62 (Đề minh họa 2016). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$.

A. $\frac{37}{12}$. **B.** $\frac{81}{12}$. **C.** 13. **D.** $\frac{9}{4}$.

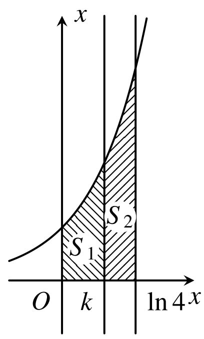
Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - x = x - x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2. \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int\limits_{-2}^{1} \left|\left(x^3 - x\right) - \left(x - x^2\right)\right| dx = \frac{37}{12}$.

Chọn phương án **A.** □

5.63 (Đề thử nghiệm 2017). Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ $(0 < k < \ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.



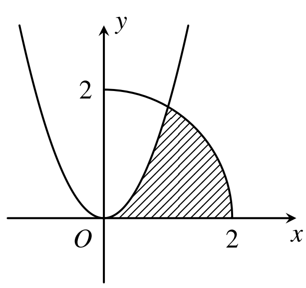
A. $k = \frac{2}{3}\ln 4$. **B.** $k = \ln 2$. **C.** $k = \ln \frac{8}{3}$. **D.** $k = \ln 3$.

Lời giải.

Từ hình vẽ ta có $S_1 = \int\limits_{0}^{k} e^x\,dx = e^x\Big|_0^k = e^k - 1$; $S_2 = \int\limits_{k}^{\ln 4} e^x\,dx = e^x\Big|_k^{\ln 4} = 4 - e^k$.

Khi đó $S_1 = 2S_2 \Leftrightarrow e^k - 1 = 2\left(4 - e^k\right) \Leftrightarrow 3e^k = 9 \Leftrightarrow k = \ln 3$.
Chọn phương án **D.** □

5.64 (Đề tham khảo 2018). Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4 - x^2}$ (với $0 \leqslant x \leqslant 2$) và trục hoành (phần gạch chéo trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{4\pi - \sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{5\sqrt{3} - 2\pi}{3}$.

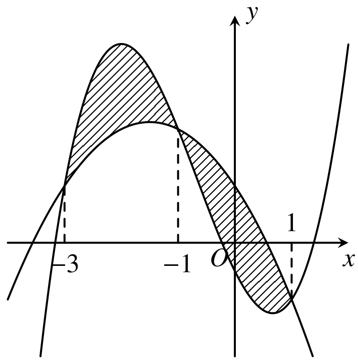
C. $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{4\pi + 2\sqrt{3} - 3}{6}$.

Lời giải.
Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{3}x^2 = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow 3x^4 + x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (vì $0 \leqslant x \leqslant 2$).

Dựa vào hình vẽ ta có $S = \int\limits_0^2 \sqrt{3}x^2 \mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$.

Dùng máy tính dò được phương án **B**.
Chọn phương án **A.** □

5.65 (Đề chính thức 2018). Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \dfrac{1}{2}$ và $g(x) = dx^2 + ex + 1$ $(a, b, c, d, e \in \mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -3; -1; 1 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



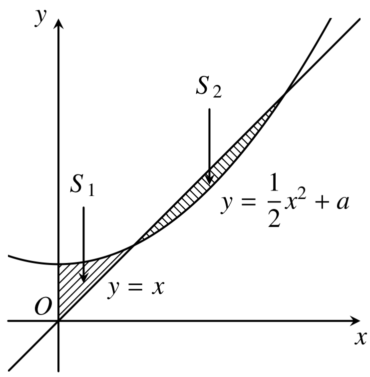
A. 5. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải.
Ta có $(C)\colon y = f(x)$ và $(C')\colon y = g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $-3; -1$ và 1.
Suy ra $f(x) - g(x) = A(x+3)(x+1)(x-1)$.
Từ giả thiết ta có $f(0) - g(0) = -\dfrac{3}{2}$ nên $-3A = -\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow A = \dfrac{1}{2}$.
Do đó $f(x) - g(x) = \dfrac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-1) = \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$.
Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_{-3}^{-1} \left[f(x) - g(x)\right] \mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{1} \left[g(x) - f(x)\right] \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{-3}^{-1} \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) \mathrm{d}x - \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) \mathrm{d}x \\ &= 2 - (-2) = 4. \end{aligned}$$

Chọn phương án **C.** □

5.66 (Đề chính thức 2019). Cho đường thẳng $y = x$ và parabol $y = \dfrac{1}{2}x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{5}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{2}{5}; \dfrac{3}{7}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{3}{7}; \dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(0; \dfrac{1}{3}\right)$.

Lời giải.
Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{1}{2}x^2 + a = x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2a = 0.$ (1)
Từ hình vẽ, ta thấy (1) có hai nghiệm dương phân biệt, do đó

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2a > 0 \\ 2 > 0 \\ 2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < \frac{1}{2}.$$

Khi đó, giả sử (1) có hai nghiệm x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$, ta có

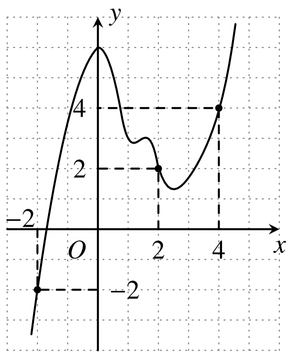
$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow \int\limits_0^{x_1} \left(\frac{1}{2}x^2 + a - x\right) \mathrm{d}x = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{1}{2}x^2 - a + x\right) \mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}x_1^3 + ax_1 - \frac{1}{2}x_1^2 = -\frac{1}{6}x_2^3 - ax_2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{6}x_1^3 + ax_1 - \frac{1}{2}x_1^2$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{6}x_2^3 - ax_2 + \frac{1}{2}x_2^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x_2^2 + 6a - 3x_2 = 0. \qquad (2)$$

Vì x_2 là một nghiệm của (1) nên $x_2^2 - 2x_2 + 2a = 0 \Leftrightarrow 2a = -x_2^2 + 2x_2$, thay vào (2) được

$$2x_2^2 - 3x_2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_2 = 0 \text{ (loại)} \\ x_2 = \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Rightarrow a = \frac{3}{8} \in \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{5}\right).$$

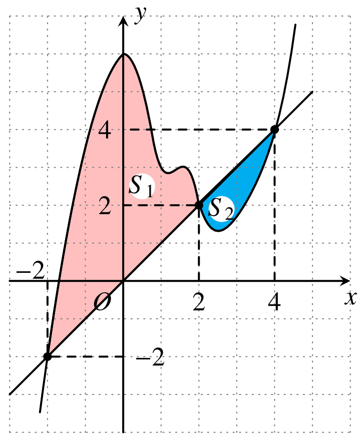
Chọn phương án **A**. □

5.67 (Đề chính thức 2017). Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $h(x) = 2f(x) - x^2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



A. $h(2) > h(-2) > h(4)$.
B. $h(4) = h(-2) < h(2)$.
C. $h(4) = h(-2) > h(2)$.
D. $h(2) > h(4) > h(-2)$.

Lời giải.



Ta có $h'(x) = 2f'(x) - 2x = 2(f'(x) - x)$.
Từ hình vẽ ta có $f'(x) > x, \forall x \in (-2; 2) \Rightarrow h'(x) > 0, \forall x \in (-2; 2)$.
Suy ra $h(x)$ đồng biến trên $(-2; 2)$ nên $h(-2) < h(2)$.
Lại có $f'(x) < x, \forall x \in (2; 4) \Rightarrow h'(x) < 0, \forall x \in (2; 4)$.
Suy ra $h(x)$ nghịch biến trên $(2; 4)$ nên $h(2) > h(4)$.
Giả sử S_1, S_2 là diện tích các hình phẳng như trên hình vẽ.

Ta có $S_1 = \displaystyle\int\limits_{-2}^{2} \left(f'(x) - x\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} h'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(h(2) - h(-2))$.

Lại có $S_2 = \displaystyle\int\limits_{2}^{4} \left(x - f'(x)\right) \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int\limits_{2}^{4} h'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(h(2) - h(4))$.

Từ hình vẽ có $S_1 > S_2 \Leftrightarrow h(2) - h(-2) > h(2) - h(4) \Leftrightarrow h(4) > h(-2)$.
Vậy $h(2) > h(4) > h(-2)$.
Chọn phương án **D**. □

2. Thể tích vật thể

5.68 (Đề tham khảo 2017). Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1 \leqslant x \leqslant 3)$ thì được thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2 - 2}$.

A. $V = \dfrac{124}{3}$.
B. $V = \left(32 + 2\sqrt{15}\right)\pi$.
C. $V = 32 + 2\sqrt{15}$.
D. $V = \dfrac{124\pi}{3}$.

Lời giải.

Diện tích thiết diện là $S(x) = 3x\sqrt{3x^2 - 2}$.

Thể tích của vật thể cần tìm là $V = \int\limits_1^3 3x\sqrt{3x^2 - 2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{124}{3}$.

Chọn phương án **A.** □

3. Thể tích khối tròn xoay

5.69 (Đề tham khảo 2018). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức

A. $V = \pi^2 \int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $V = 2\pi \int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $V = \pi^2 \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Công thức tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành là $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn phương án **D.** □

5.70 (Đề minh họa 2016). Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, xung quanh trục Ox.

A. $V = \pi \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $V = \pi \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $V = \int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo công thức ta có $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn phương án **B.** □

5.71 (Đề chính thức 2020). Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y = \mathrm{e}^{3x}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

A. $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{6x}\,\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$. **C.** $\pi \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{6x}\,\mathrm{d}x$. **D.** $\pi \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox là $V = \pi \int\limits_0^1 \left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2\,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{6x}\,\mathrm{d}x$.

Chọn phương án **C.** □

5.72 (Đề chính thức 2017). Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \pi - 1$. **B.** $V = \pi + 1$. **C.** $V = (\pi + 1)\pi$. **D.** $V = (\pi - 1)\pi$.

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay là $V = \pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + \cos x)\,\mathrm{d}x = \pi(\pi + 1)$.

Chọn phương án **C.** □

5.73 (Đề minh họa 2016). Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2(x-1)e^x$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox.

A. $V = e^2 - 5$. **B.** $V = (e^2 - 5)\pi$. **C.** $V = (4 - 2e)\pi$. **D.** $V = 4 - 2e$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $2(x-1)e^x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Thể tích khối tròn xoay thu được là $V = \int\limits_0^1 2(x-1)e^x\,dx$.

Sử dụng máy tính tính V và lưu vào biến nhớ A. Nhập A trừ các đáp án được kết quả 0 thì chọn.

Chọn phương án **B.** □

4. Vận tốc, quãng đường

5.74 (Đề minh họa 2016). Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 20m. **B.** 0,2m. **C.** 2m. **D.** 10m.

Lời giải.

Khi ô tô dừng hẳn ta có $v(t) = 0 \Leftrightarrow -5t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Quãng đường ô tô đi được từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là $s = \int\limits_0^2 (-5t + 10)\,dt = 10$ (m).

Chọn phương án **D.** □

5.75 (Đề chính thức 2018). Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t$ m/s, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng a m/s^2 (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. 7 m/s. **B.** 10 m/s. **C.** 15 m/s. **D.** 22 m/s.

Lời giải.

Vận tốc chuyển động của chất điểm B là $v_B(t) = \int a\,dt = at + C$.

Từ trạng thái nghỉ chất điểm B mới chuyển động nên có $v_B(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow v_B(t) = at$.

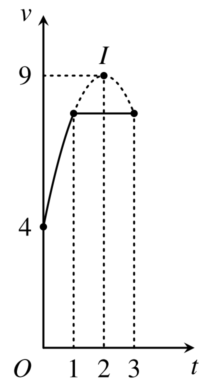
Thời điểm chất điểm B đuổi kịp A thì A đi được 15 giây còn B đi được 10 giây.

Do đó ta có $\int\limits_0^{15} \left(\frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t\right)\,dt = \int\limits_0^{10} at\,dt \Leftrightarrow 75 = 50a \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$.

Vậy, vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(10) = \frac{3}{2} \cdot 10 = 15$ m/s.

Chọn phương án **C.** □

5.76 (Đề chính thức 2017). Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



A. $s = 15{,}50$ (km). **B.** $s = 23{,}25$ (km).
C. $s = 13{,}83$ (km). **D.** $s = 21{,}58$ (km).

Lời giải.
Giả sử phương trình vận tốc trong khoảng thời gian 1 giờ là $v(t) = at^2 + bt + c$.
Ta có $v'(t) = 2at + b$.
Theo giả thiết $v(t)$ là parabol có đỉnh $I(2;9)$ và đi qua điểm $(0;4)$.

Do đó ta có $\begin{cases} 0 = 4a + b \\ 9 = 4a + 2b + c \\ 4 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{5}{4} \\ b = 5 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow v(t) = -\dfrac{5}{4}t^2 + 5t + 4.$

Tại thời điểm 1 giờ, vận tốc của vật là $v(1) = -\dfrac{5}{4} + 5 + 4 = \dfrac{31}{4}$ (km/h).

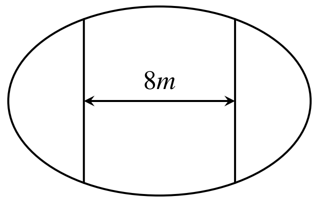
Trong thời gian từ 1 giờ đến 3 giờ vật chuyển động với vận tốc $v = \dfrac{31}{4}$ (km/h).

Do đó quãng đường vật đi được trong 3 giờ là $s = \displaystyle\int_0^1 \left(-\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4\right) \mathrm{d}t + \int_1^3 \frac{31}{4} \mathrm{d}t \approx 21{,}58$ (km).

Chọn phương án **D**. □

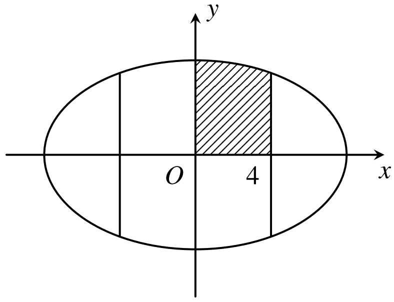
5. Bài toán thực tế

5.77 (Đề thử nghiệm 2017). Ông An có một mảnh vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng 16 m và độ dài trục bé bằng 10 m. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng 8 m và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/1m^2. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



A. 7.653.000 đồng. **B.** 7.862.000 đồng. **C.** 7.128.000 đồng. **D.** 7.826.000 đồng.

Lời giải.
Ta có phương trình của elip là $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{25} = 1$.
Xét phần hình phẳng giới hạn bởi tia Ox, tia Oy và elip.



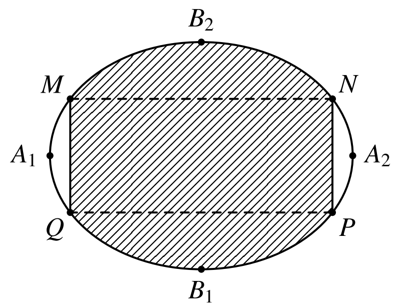
Khi đó $x, y \geqslant 0$ nên ta có $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{25} = 1 \Leftrightarrow y = 5\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{64}}$.

Diện tích phần hình phẳng đang xét là $\displaystyle\int_0^4 5\sqrt{1 - \frac{x^2}{64}}\, \mathrm{d}x$.

Diện tích phần dải đất ông An trồng hoa là $4\displaystyle\int_0^4 5\sqrt{1 - \frac{x^2}{64}}\, \mathrm{d}x$.

Vậy kinh phí để ông An trồng hoa là $100.000 \times 4\displaystyle\int_0^4 5\sqrt{1 - \frac{x^2}{64}}\, \mathrm{d}x \approx 7.653.000$ đồng.

Chọn phương án **A**. □



5.78 (Đề tham khảo 2019). Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 200.000 đồng/m^2 và phần còn lại là 100.000 đồng/m^2. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8$m, $B_1B_2 = 6$m và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3$m?

A. 5.526.000 đồng. **B**. 7.322.000 đồng.
C. 5.782.000 đồng. **D**. 7.213.000 đồng.

Lời giải.
Theo giả thiết ta có $a = 4, b = 3$ nên elip có diện tích $S = \pi ab = 12\pi$.
Elip có phương trình $(E) : \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, suy ra $y = \pm\dfrac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$.
Lại có $MQ = 3$, suy ra $y_M = \dfrac{3}{2} \Rightarrow x_M = -2\sqrt{3} \Rightarrow x_N = 2\sqrt{3}$.
Từ đó suy ra diện tích phần tô đậm là $S_1 = 4\displaystyle\int\limits_0^{2\sqrt{3}} \dfrac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}\,\mathrm{d}x = 3\int\limits_0^{2\sqrt{3}} \sqrt{16 - x^2}\,\mathrm{d}x$.
Sử dụng máy tính tính S_1 và lưu vào biến nhớ A.
Khi đó phần diện tích không tô đậm là $S_2 = S - S_1 = 12\pi - \mathrm{A}$.
Vậy số tiền cần tìm là $T = 100.000 \times (12\pi - \mathrm{A}) + 200.000 \times \mathrm{A} \approx 7.322.000$ đồng.
Chọn phương án **B.** □

Chuyên đề 6

Phương Pháp Tọa Độ Trong Không Gian

§1. Tọa Độ Trong Không Gian

1. Tọa độ điểm, vectơ

6.1 (Đề tham khảo 2019). Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-1)$ và $B(2;3;2)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A. $(3;4;1)$. **B.** $(3;5;1)$. **C.** $(-1;-2;3)$. **D.** $(1;2;3)$.

Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{AB} = (2-1;3-1;2-(-1)) = (1;2;3)$.
Chọn phương án **D.** □

6.2 (Đề chính thức 2018). Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-4;3)$ và $B(2;2;7)$. Trung điểm của đoạn AB có tọa độ là

A. $(4;-2;10)$. **B.** $(2;-1;5)$. **C.** $(1;3;2)$. **D.** $(2;6;4)$.

Lời giải.
Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB, ta có $M = \left(\dfrac{2+2}{2};\dfrac{-4+2}{2};\dfrac{3+7}{2}\right) = (2;-1;5)$.
Chọn phương án **B.** □

6.3 (Đề thử nghiệm 2017). Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;3)$ và $B(-1;2;5)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

A. $I(2;-2;-1)$. **B.** $I(1;0;4)$. **C.** $I(-2;2;1)$. **D.** $I(2;0;8)$.

Lời giải.
Từ công thức $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$ ta tính được $I(1;0;4)$.
Chọn phương án **B.** □

6.4 (Đề chính thức 2020). Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;2;1)$ trên trục Ox có tọa độ là

A. $(0;0;1)$. **B.** $(3;0;0)$. **C.** $(0;2;0)$. **D.** $(0;2;1)$.

Lời giải.
Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;2;1)$ lên trục Ox là $(3;0;0)$.
Chọn phương án **B.** □

6.5 (Đề chính thức 2019). Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên trục Oz có tọa độ là

A. $(2;1;0)$. **B.** $(0;1;0)$. **C.** $(0;0;-1)$. **D.** $(2;0;0)$.

Lời giải.
Hình chiếu của điểm $M(a;b;c)$ trên trục Oz có tọa độ là $(0;0;c)$.
Chọn phương án **C.** □

6.6 (Đề tham khảo 2020). Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;-2;1)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

A. $(2;-2;0)$. **B.** $(2;0;1)$. **C.** $(0;-2;1)$. **D.** $(0;0;1)$.

Lời giải.
Hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;-2;1)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ $(2;-2;0)$.

Chọn phương án **A.** □

6.7 (Đề tham khảo 2018). Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; 1)$. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

A. $M(3; 0; 0)$. **B.** $Q(0; 0; 1)$. **C.** $N(0; -1; 1)$. **D.** $P(0; -1; 0)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của $M(x_0; y_0; z_0)$ trên (Oyz) là $M'(0; y_0; z_0)$

Chọn phương án **C.** □

6.8 (Đề chính thức 2020). Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây là hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; 4; 2)$ trên mặt phẳng (Oxy)?

A. $Q(1; 0; 2)$. **B.** $N(0; 4; 2)$. **C.** $P(1; 4; 0)$. **D.** $M(0; 0; 2)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; 4; 2)$ trên mặt phẳng (Oxy) là $P(1; 4; 0)$.

Chọn phương án **C.** □

6.9 (Đề tham khảo 2020). Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -1)$ trên mặt phẳng (Ozx) có tọa độ là

A. $(0; 1; 0)$. **B.** $(2; 0; -1)$. **C.** $(2; 1; 0)$. **D.** $(0; 1; -1)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của $M(x_0; y_0; z_0)$ trên mặt phẳng (Ozx) là $M'(x_0; 0; z_0)$.

Do đó hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -1)$ trên mặt phẳng (Ozx) có tọa độ là $(2; 0; -1)$.

Chọn phương án **B.** □

2. Tích vô hướng và ứng dụng

6.10 (Đề tham khảo 2020). Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (1; 0; 3)$ và $\vec{b} = (-2; 2; 5)$. Tích vô hướng $\vec{a} \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right)$ bằng

A. 29. **B.** 25. **C.** 27. **D.** 23.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} + \vec{b} = (-1; 2; 8)$. Do đó $\vec{a} \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = -1 + 0 + 24 = 23$.

Chọn phương án **D.** □

6.11 (Đề tham khảo 2017). Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(3; -4; 0)$, $B(-1; 1; 3)$ và $C(3; 1; 0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD = BC$.

A. $D(6; 0; 0)$ hoặc $D(12; 0; 0)$. **B.** $D(0; 0; 0)$ hoặc $D(-6; 0; 0)$.

C. $D(0; 0; 0)$ hoặc $D(6; 0; 0)$. **D.** $D(-2; 0; 0)$ hoặc $D(-4; 0; 0)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC} = (4; 0; -3) \Rightarrow BC = 5$.

Lại có $D \in Ox \Rightarrow D(x; 0; 0)$, do đó $\overrightarrow{AD} = (x - 3; 4; 0) \Rightarrow AD = \sqrt{x^2 - 6x + 25}$.

Khi đó $AD = BC \Leftrightarrow x^2 - 6x + 25 = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 6. \end{array}\right.$

Chọn phương án **C.** □

3. Tâm, bán kính mặt cầu

6.12 (Đề tham khảo 2017). Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 20$.

A. $I(-1; 2; -4), R = 2\sqrt{5}$. **B.** $I(-1; 2; -4), R = 5\sqrt{2}$.

C. $I(1; -2; 4), R = 20$. **D.** $I(1; -2; 4), R = 2\sqrt{5}$.

Lời giải.

Mặt cầu $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 20$ có tâm $I(1; -2; 4)$ và bán kính $R = 2\sqrt{5}$.

Chọn phương án **D.** □

6.13 (Đề minh họa 2016). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 9$. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của (S).

A. $I(1; -2; -1)$ và $R = 3$. **B.** $I(1; -2; -1)$ và $R = 9$.

C. $I(-1;2;1)$ và $R=9$. **D.** $I(-1;2;1)$ và $R=3$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và bán kính $R=3$.

Chọn phương án **D.** □

6.14 (Đề tham khảo 2020). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y+4)^2+(z-1)^2=9$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-2;4;-1)$. **B.** $(2;4;1)$. **C.** $(-2;-4;-1)$. **D.** $(2;-4;1)$.

Lời giải.

Mặt cầu $(S)\colon (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ có tâm $I(a;b;c)$.

Do đó tâm của mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y+4)^2+(z-1)^2=9$ có tọa độ là $(2;-4;1)$.

Chọn phương án **D.** □

6.15 (Đề chính thức 2020). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=4$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-1;2;-3)$. **B.** $(1;-2;3)$. **C.** $(-2;4;-6)$. **D.** $(2;-4;6)$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;-3)$.

Chọn phương án **A.** □

6.16 (Đề chính thức 2020). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z+2)^2=9$. Bán kính của (S) bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 18.

Lời giải.

Bán kính của (S) bằng $\sqrt{9}=3$.

Chọn phương án **A.** □

6.17 (Đề tham khảo 2020). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(1;-2;3)$. **B.** $(-1;-2;-3)$. **C.** $(1;2;3)$. **D.** $(-1;2;-3)$.

Lời giải.

Tâm của (S) có tọa độ là $(1;-2;3)$.

Chọn phương án **A.** □

6.18 (Đề chính thức 2019). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2x-2z-7=0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. 9. **B.** 3. **C.** $\sqrt{15}$. **D.** $\sqrt{7}$.

Lời giải.

Ta có

$$x^2+y^2+z^2+2x-2z-7=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+y^2+(z-1)^2=9.$$

Vậy, mặt cầu (S) có bán kính bằng 3.

Chọn phương án **B.** □

4. Phương trình mặt cầu

6.19 (Đề tham khảo 2019). Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $I(1;1;1)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình của mặt cầu có tâm I và đi qua A là

A. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=5$. **B.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$.

C. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5$. **D.** $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=29$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(0;1;2) \Rightarrow R=IA=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$. Vậy, mặt cầu có phương trình

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5.$$

Chọn phương án **C.** □

6.20 (Đề tham khảo 2020). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm là điểm $I(0;0;-3)$ và đi qua điểm $M(4;0;0)$. Phương trình của (S) là

A. $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 25.$ **B.** $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 5.$
C. $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 25.$ **D.** $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 5.$

Lời giải.
Mặt cầu (S) tâm $I(0; 0; -3)$ và đi qua $M(4; 0; 0)$ nên có bán kính $R = IM = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.
Vậy mặt cầu (S) có phương trình là $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 25$.
Chọn phương án **A.** □

6.21 (Đề chính thức 2017). Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu tâm I bán kính IM?
A. $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}.$ **B.** $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 17.$
C. $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 13.$ **D.** $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 13.$

Lời giải.
Ta có I là hình chiếu của $M(1; -2; 3)$ trên Ox nên $I(1; 0; 0)$, từ đó loại các phương án $(x+1)^2+y^2+z^2 = 13$ và $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 17$.
Khi đó $\overrightarrow{IM} = (0; -2; 3) \Rightarrow IM = \sqrt{0 + 4 + 9} = \sqrt{13}$, từ đó loại phương án $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}$.
Chọn phương án **C.** □

§2. Phương Trình Mặt Phẳng

1. Các yếu tố của mặt phẳng

6.22 (Đề tham khảo 2020). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 3x + 2y - 4z + 1 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (α)?
A. $\vec{n}_1 = (3; -4; 1).$ **B.** $\vec{n}_4 = (3; 2; -4).$ **C.** $\vec{n}_2 = (3; 2; 4).$ **D.** $\vec{n}_3 = (2; -4; 1).$

Lời giải.
Mặt phẳng $(\alpha)\colon 3x + 2y - 4z + 1 = 0$ có một vec pháp tuyến là $\vec{n}_4 = (3; 2; -4)$.
Chọn phương án **B.** □

6.23 (Đề minh họa 2016). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 3x - z + 2 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P)?
A. $\vec{n}_1 = (3; -1; 2).$ **B.** $\vec{n}_2 = (3; 0; -1).$ **C.** $\vec{n}_4 = (-1; 0; -1).$ **D.** $\vec{n}_3 = (3; -1; 0).$

Lời giải.
Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3; 0; -1)$.
Chọn phương án **B.** □

6.24 (Đề chính thức 2020). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x + 4y - z + 3 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (α)?
A. $\vec{n}_4 = (-2; 4; 1).$ **B.** $\vec{n}_3 = (2; 4; 1).$ **C.** $\vec{n}_2 = (2; -4; 1).$ **D.** $\vec{n}_1 = (2; 4; -1).$

Lời giải.
Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (2; 4; -1)$.
Chọn phương án **D.** □

6.25 (Đề tham khảo 2020). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x + 3y + z + 2 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P)?
A. $\vec{n}_4 = (2; 0; 3).$ **B.** $\vec{n}_2 = (2; 3; 1).$ **C.** $\vec{n}_1 = (2; 3; 0).$ **D.** $\vec{n}_3 = (2; 3; 2).$

Lời giải.
Mặt phẳng $(P)\colon Ax + By + Cz + D = 0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$.
Do đó một vectơ pháp tuyến của $(P)\colon 2x + 3y + z + 2 = 0$ là $\vec{n}_2 = (2; 3; 1)$.
Chọn phương án **B.** □

6.26 (Đề chính thức 2019). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x + 2y + 3z - 1 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P)?
A. $\vec{n}_3 = (1; 2; -1).$ **B.** $\vec{n}_4 = (1; 2; 3).$ **C.** $\vec{n}_1 = (1; 3; -1).$ **D.** $\vec{n}_2 = (2; 3; -1).$

Lời giải.
Mặt phẳng $(P)\colon Ax + By + Cz + D = 0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$.
Chọn phương án **B.** □

6.27 (Đề chính thức 2018). Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): x + 2y + 3z - 5 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}_2 = (1; 2; 3)$. B. $\vec{n}_3 = (-1; 2; 3)$. C. $\vec{n}_4 = (1; 2; -3)$. D. $\vec{n}_1 = (3; 2; 1)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (1; 2; 3)$.

Chọn phương án **A.** □

6.28 (Đề chính thức 2017). Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy)?

A. $\vec{j} = (0; 1; 0)$. B. $\vec{m} = (1; 1; 1)$. C. $\vec{i} = (1; 0; 0)$. D. $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oxy) có phương trình $z = 0$ nên nhận vectơ $\vec{k} = (0; 0; 1)$ làm một vectơ pháp tuyến.

Chọn phương án **D.** □

6.29 (Đề chính thức 2017). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x - 2y + z - 5 = 0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P)?

A. $Q(2; -1; 5)$. B. $N(-5; 0; 0)$. C. $M(1; 1; 6)$. D. $P(0; 0; -5)$.

Lời giải.

Thay tọa độ M vào (P) ta có $1 - 2 \cdot 1 + 6 - 5 = 0$ thỏa mãn nên $M \in (P)$.

Chọn phương án **C.** □

2. Phương trình mặt phẳng

6.30 (Đề tham khảo 2019). Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxz) có phương trình là

A. $y = 0$. B. $z = 0$. C. $x = 0$. D. $x + y + z = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oxz) có phương trình là $y = 0$.

Chọn phương án **A.** □

6.31 (Đề tham khảo 2018). Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2; 0; 0)$, $N(0; -1; 0)$ và $P(0; 0; 2)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là

A. $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1$. B. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = -1$. C. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1$. D. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (MNP) có phương trình đoạn chắn $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1$.

Chọn phương án **C.** □

6.32 (Đề thử nghiệm 2017). Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$ và $C(0; 0; 3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng (ABC)?

A. $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{3} = 1$. B. $\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = 1$. C. $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{1} = 1$. D. $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{-2} = 1$.

Lời giải.

Mặt phẳng (ABC) có phương trình đoạn chắn $\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = 1$.

Chọn phương án **B.** □

6.33 (Đề chính thức 2020). Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$ và $C(0; 0; -2)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1$. B. $\frac{x}{-3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1$. C. $\frac{x}{3} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1$. D. $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{-2} = 1$.

Lời giải.

Mặt phẳng (ABC) có phương trình dạng đoạn chắn $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{-2} = 1$.

Chọn phương án **D.** □

6.34 (Đề chính thức 2019). Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 3; 0)$ và $B(5; 1; -2)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $x + y + 2z - 3 = 0$. B. $2x - y - z + 5 = 0$.

C. $3x + 2y - z - 14 = 0$. D. $2x - y - z - 5 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; -2; -2) = 2(2; -1; -1)$. Gọi I là trung điểm AB, suy ra $I(3; 2; -1)$. Mặt phẳng trung trực của AB đi qua $I(3; 2; -1)$ và vuông góc với AB nên có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; -1; -1)$.

Vậy, mặt phẳng trung trực của AB có phương trình

$$2(x-3)-(y-2)-(z+1)=0 \Leftrightarrow 2x-y-z-5=0.$$

Chọn phương án **D.** □

6.35 (Đề chính thức 2018). Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(2;-1;2)$ và song song với mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+3z+2=0$ có phương trình là

A. $2x-y+3z+11=0$.
B. $2x-y-3z+11=0$.
C. $2x-y+3z-9=0$.
D. $2x-y+3z-11=0$.

Lời giải.
Gọi (Q) là mặt phẳng cần viết phương trình.
Ta có (Q) song song với (P) nên nhận $\vec{n}_{(P)}=(2;-1;3)$ làm một vectơ pháp tuyến.
Vậy (Q) có phương trình $2(x-2)-(y+1)+3(z-2)=0 \Leftrightarrow 2x-y+3z-11=0$.
Chọn phương án **D.** □

6.36 (Đề chính thức 2020). Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;4)$ và mặt phẳng $P\colon 3x-2y+z+1=0$. Phương trình mặt phẳng đi qua M và song song với (P) là

A. $3x-2y+z-12=0$.
B. $3x-2y+z+12=0$.
C. $2x-y+4z+21=0$.
D. $2x-y+4z-21=0$.

Lời giải.
Mặt phẳng song song với (P) nên nhận $\vec{n}_{(P)}(3;-2;1)$ làm một vectơ pháp tuyến.
Mặt phẳng đi qua $M(2;-1;4)$ nên có phương trình

$$3(x-2)-2(y+1)+1(z-4)=0 \Leftrightarrow 3x-2y+z-12=0.$$

Chọn phương án **A.** □

6.37 (Đề tham khảo 2018). Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;1)$ và $B(2;1;0)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với AB có phương trình là

A. $3x-y-z+6=0$. **B.** $x+3y+z-5=0$. **C.** $x+3y+z-6=0$. **D.** $3x-y-z-6=0$.

Lời giải.
Gọi (P) là mặt phẳng cần viết phương trình.
Vì $(P)\perp AB$ nên nhận $\overrightarrow{AB}=(3;-1;-1)$ làm vectơ pháp tuyến.
Do đó (P) có phương trình $3(x+1)-(y-2)-(z-1)=0 \Leftrightarrow 3x-y-z+6=0$.
Chọn phương án **A.** □

6.38 (Đề minh họa 2016). Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;1)$ và $B(1;2;3)$. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB.

A. $x+3y+4z-7=0$.
B. $x+y+2z-6=0$.
C. $x+y+2z-3=0$.
D. $x+3y+4z-26=0$.

Lời giải.
Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\overrightarrow{AB}=(1;1;2)$.
Vậy (P) có phương trình $x+y-1+2(z-1)=0 \Leftrightarrow x+y+2z-3=0$.
Chọn phương án **C.** □

6.39 (Đề minh họa 2016). Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;-2;0)$, $B(0;-1;1)$, $C(2;1;-1)$ và $D(3;1;4)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng cách đều bốn điểm đó?

A. Có vô số mặt phẳng.
B. 4 mặt phẳng.
C. 1 mặt phẳng.
D. 7 mặt phẳng.

Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;1;1), \overrightarrow{AC}=(1;3;-1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-4;0;-4)$.
Lại có $\overrightarrow{AD}=(2;3;4) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AD}=-8+0-16=-24\neq 0$ nên A, B, C, D không đồng phẳng.
Gọi (P) là mặt phẳng cách đều bốn điểm A, B, C, D.

TH1: A,B,C,D nằm cùng phía với (P). Trường hợp này không tồn tại (P) cách đều A,B,C,D vì bốn điểm này không đồng phẳng.

TH2: Có một điểm nằm khác phía với ba điểm còn lại. Trường hợp này có bốn mặt phẳng (P) thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH3: Có hai điểm nằm khác phía với hai điểm còn lại. Trường hợp này có ba mặt phẳng (P) thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy tổng cộng có 7 mặt phẳng cách đều bốn điểm A, B, C, D.
Chọn phương án **D**. □

6.40 (Đề tham khảo 2018). Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $OA = OB = OC \neq 0$?

A. 4. **B**. 8. **C**. 3. **D**. 1.

Lời giải.
Giả sử $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $abc \neq 0$, ta có $(P)\colon \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.
Mặt phẳng (P) đi qua M nên $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{2}{c} = 1$. $(*)$
Lại có $OA = OB = OC$ nên $|a| = |b| = |c|$, do đó ta có các trường hợp:

TH1: $a = b = c$, thay vào $(*)$ được $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{a} = 1 \Leftrightarrow a = 4 \Rightarrow (P)\colon x + y + z - 4 = 0$.

TH2: $a = b = -c$, thay vào $(*)$ được $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a} - \dfrac{2}{a} = 1 \Leftrightarrow 0 = 1$ (vô lý).

TH3: $a = -b = c$, thay vào $(*)$ được $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{a} = 1 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow (P)\colon x - y + z - 2 = 0$.

TH4: $a = -b = -c$, thay vào $(*)$ được $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a} - \dfrac{2}{a} = 1 \Leftrightarrow a = -2 \Rightarrow (P)\colon x - y - z + 2 = 0$.

Vậy có 3 mặt phẳng (P) thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn phương án **C**. □

3. Góc và khoảng cách

6.41 (Đề tham khảo 2019). Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 10 = 0$ và $(Q): x + 2y + 2z - 3 = 0$ bằng

A. $\dfrac{4}{3}$. **B**. 3. **C**. $\dfrac{7}{3}$. **D**. $\dfrac{8}{3}$.

Lời giải.
Nhận thấy $(P) \parallel (Q)$, do đó $\mathrm{d}\left[(P),(Q)\right] = \dfrac{|-10+3|}{\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{7}{3}$.
Chọn phương án **C**. □

6.42 (Đề minh họa 2016). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 3x + 4y + 2z + 4 = 0$ và điểm $A(1;-2;3)$. Tính khoảng cách d từ A đến (P).

A. $d = \dfrac{5}{\sqrt{29}}$. **B**. $d = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **C**. $d = \dfrac{5}{29}$. **D**. $d = \dfrac{5}{9}$.

Lời giải.
Ta có $\mathrm{d}(A,(P)) = \dfrac{|3-8+6+4|}{\sqrt{9+16+4}} = \dfrac{5}{\sqrt{29}}$.
Chọn phương án **A**. □

§3. Phương Trình Đường Thẳng Trong Không Gian

1. Các yếu tố của đường thẳng

6.43 (Đề chính thức 2019). Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{1}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u}_3=(-1;2;1)$. **B.** $\vec{u}_1=(2;1;-3)$. **C.** $\vec{u}_4=(1;2;-3)$. **D.** $\vec{u}_2=(2;1;1)$.

Lời giải.
Đường thẳng $d\colon \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(a;b;c)$.
Chọn phương án **A.** □

6.44 (Đề chính thức 2020). Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-4}{-5}=\dfrac{z+1}{3}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u}_4=(3;4;1)$. **B.** $\vec{u}_2=(3;4;-1)$. **C.** $\vec{u}_1=(2;-5;3)$. **D.** $\vec{u}_3=(2;5;3)$.

Lời giải.
Đường thẳng đã cho có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(2;-5;3)$.
Chọn phương án **C.** □

6.45 (Đề thử nghiệm 2017). Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1\\ y=2+3t\\ z=5-t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. Vectơ nào dưới đây là vectơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u}_2=(1;3;-1)$. **B.** $\vec{u}_4=(1;2;5)$. **C.** $\vec{u}_3=(1;-3;-1)$. **D.** $\vec{u}_1=(0;3;-1)$.

Lời giải.
Đường thẳng $\begin{cases} x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+ct\end{cases}$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a;b;c)$.
Do đó đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}(0;3;-1)$.
Chọn phương án **D.** □

6.46 (Đề chính thức 2018). Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=2-t\\ y=1+2t\\ z=3+t\end{cases}$ có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_4=(-1;2;1)$. **B.** $\vec{u}_1=(-1;2;3)$. **C.** $\vec{u}_3=(2;1;3)$. **D.** $\vec{u}_2=(2;1;1)$.

Lời giải.
Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_4=(-1;2;1)$.
Chọn phương án **A.** □

6.47 (Đề tham khảo 2018). Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$. Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_2=(2;1;0)$. **B.** $\vec{u}_1=(-1;2;1)$. **C.** $\vec{u}_4=(-1;2;0)$. **D.** $\vec{u}_3=(2;1;1)$.

Lời giải.
Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}_1=(-1;2;1)$.
Chọn phương án **B.** □

6.48 (Đề tham khảo 2020). Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{-1}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

A. $N(2;3;-1)$. **B.** $Q(-2;-3;1)$. **C.** $P(1;2;-1)$. **D.** $M(-1;-2;1)$.

Lời giải.
Đường thẳng $d\colon \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$.
Do đó đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{-1}$ đi qua điểm $M(1;2;-1)$.

Chọn phương án **C**. □

6.49 (Đề chính thức 2020). Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+3}{1}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

A. $P(2;1;-3)$. **B.** $M(2;1;3)$. **C.** $N(4;2;1)$. **D.** $Q(4;-2;1)$.

Lời giải.
Dễ thấy d đi qua điểm $P(2;1;-3)$.
Chọn phương án **A**. □

6.50 (Đề tham khảo 2020). Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-1}{3}$?

A. $P(-1;2;1)$. **B.** $N(-1;3;2)$. **C.** $Q(1;-2;-1)$. **D.** $M(1;2;1)$.

Lời giải.
Đường thẳng $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$.
Vậy, đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-1}{3}$ đi qua điểm $P(-1;2;1)$.
Chọn phương án **A**. □

6.51 (Đề tham khảo 2019). Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $N(-2;1;-2)$. **B.** $Q(2;-1;2)$. **C.** $M(-1;-2;-3)$. **D.** $P(1;2;3)$.

Lời giải.
Dễ thấy d đi qua điểm $P(1;2;3)$.
Chọn phương án **D**. □

6.52 (Đề tham khảo 2020). Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng đi qua hai điểm $M(2;3;-1)$ và $N(4;5;3)$?

A. $\vec{u}_1=(3;4;1)$. **B.** $\vec{u}_3=(1;1;2)$. **C.** $\vec{u}_4=(1;1;1)$. **D.** $\vec{u}_2=(3;4;2)$.

Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{MN}=(2;2;4)=2(1;1;2)=2\vec{u}_3$.
Do đó $\vec{u}_3$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng MN.
Chọn phương án **B**. □

2. Phương trình đường thẳng

6.53 (Đề tham khảo 2017). Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+2t \\ y=3t \\ z=-2+t \end{cases}$?

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{-2}$. **B.** $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-2}{-2}$. **C.** $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{1}$. **D.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{1}$.

Lời giải.
Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;0;-2)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;3;1)$.
Do đó d có phương trình chính tắc $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{1}$.
Chọn phương án **D**. □

6.54 (Đề chính thức 2020). Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+3z+1=0$. Phương trình đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) là

A. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2-t \\ z=-3+3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1-2t \\ z=3+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1-2t \\ y=-2-t \\ z=3-3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-t \\ z=3+3t \end{cases}$.

Lời giải.
Đường thẳng vuông góc với P nên nhận $\vec{n}_{(P)}=(2;-1;3)$ làm một vectơ pháp tuyến.

Đường thẳng đi qua $M(1;-2;3)$ nên có phương trình $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 3 + 3t. \end{cases}$

Chọn phương án **D.** □

6.55 (Đề chính thức 2017). Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(2;3;0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon x + 3y - z + 5 = 0$?

A. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Lời giải.

C1: Ta có đường thẳng vuông góc với (P) nên nhận $\vec{n}_{(P)} = (1;3;-1)$ làm một vectơ chỉ phương.

Đường thẳng đi qua $A(2;3;0)$ nên có phương trình $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 3t \\ z = -t. \end{cases}$

Chọn $t = -1$ ta có điểm $B(1;0;1)$, suy ra đường thẳng còn có phương trình $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 1 - t. \end{cases}$

C2: Đường thẳng vuông góc với (P) nên nhận $\vec{n}_{(P)} = (1;3;-1)$ làm một vectơ chỉ phương, từ đó loại các phương án $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3t \\ z = 1 + t. \end{cases}$

Thay tọa độ $A(2;3;0)$ vào đường thẳng $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$ ta có $\begin{cases} 2 = 1 + t \\ 3 = 3t \\ 0 = 1 - t \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$ thỏa mãn, do đó chọn phương án $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 1 - t. \end{cases}$

Chọn phương án **B.** □

6.56 (Đề chính thức 2020). Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;1)$, $B(1;1;0)$ và $C(3;4;-1)$. Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z-1}{-1}$. **B.** $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z+1}{-1}$. **C.** $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{-1}$. **D.** $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{-1}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC} = (2;3;-1)$.

Đường thẳng song song BC nhận $\overrightarrow{BC} = (2;3;-1)$ làm một vectơ chỉ phương.

Đường thẳng đi qua $A(1;0;1)$ nên có phương trình $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{-1}$.

Chọn phương án **D.** □

6.57 (Đề tham khảo 2020). Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;0;1)$ và $N(3;2;-1)$. Đường thẳng MN có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng MN nhận $\overrightarrow{MN} = (2;2;-2)$ làm một vectơ chỉ phương.

Do đó ta loại các phương án A, B, C.

Chọn phương án **B.** □

6.58 (Đề chính thức 2019). Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;0)$, $B(2;0;2)$, $C(2;-1;3)$ và $D(1;1;3)$. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABD) có phương trình là

A. $\begin{cases} x=-2+4t \\ y=-4+3t \\ z=2+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2+4t \\ y=-1+3t \\ z=3-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=4+2t \\ y=3-t \\ z=1+3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-2-4t \\ y=-2-3t \\ z=2-t \end{cases}$.

Lời giải.

C1: Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-2;2)$, $\overrightarrow{AD}=(0;-1;3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]=(-4;-3;-1)$.Đường thẳng đi qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABD) nhận vectơ $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình là

$$\begin{cases} x=2-4t \\ y=-1-3t \\ z=3-t \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x=-2+4t \\ y=-4+3t \\ z=2+t. \end{cases}$$

C2: Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-2;2)$, $\overrightarrow{AD}=(0;-1;3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]=(-4;-3;-1)$.Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABD) nhận vectơ $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]$ làm vectơ chỉ phương nên loại các phương án $\begin{cases} x=2+4t \\ y=-1+3t \\ z=3-t \end{cases}$ và $\begin{cases} x=4+2t \\ y=3-t \\ z=1+3t \end{cases}$. Đường thẳng đi qua C nên loại phương án $\begin{cases} x=-2-4t \\ y=-2-3t \\ z=2-t. \end{cases}$

Chọn phương án **A.** □

6.59 (Đề chính thức 2018). Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+7}{-2}$. Đường thẳng đi qua A, vuông góc với d và cắt trục Ox có phương trình là

A. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-2t \\ z=t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2t \\ z=3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=3+2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=3+3t \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm và $B=\Delta\cap Ox \Rightarrow B(b;0;0)$ và $\overrightarrow{BA}=(1-b;2;3)$.

Do $\Delta \perp d$ và Δ đi qua A nên $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{u_d}=0 \Leftrightarrow 2(1-b)+2-6=0 \Leftrightarrow b=-1$.

Suy ra $B(-1;0;0) \Rightarrow \overrightarrow{BA}=(2;2;3)$. Vậy Δ có phương trình $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2t \\ z=3t. \end{cases}$

Chọn phương án **B.** □

6.60 (Đề chính thức 2017). Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1;1;3)$ và hai đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{1}$, $\Delta'\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M, vuông góc với Δ và Δ'.

A. $\begin{cases} x=-1-t \\ y=1-t \\ z=3+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-t \\ y=1+t \\ z=3+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-1-t \\ y=1+t \\ z=1+3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-1-t \\ y=1+t \\ z=3+t \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}_\Delta=(3;2;1)$, $\vec{u}_{\Delta'}=(1;3;-2) \Rightarrow \left[\vec{u}_\Delta,\vec{u}_{\Delta'}\right]=(-7;7;7)$.

Đường thẳng cần tìm vuông góc với Δ và Δ' nên có một vectơ chỉ phương $(-1;1;1)$, ta loại phương án $\begin{cases} x=-1-t \\ y=1+t \\ z=1+3t \end{cases}$ và $\begin{cases} x=-1-t \\ y=1-t \\ z=3+t. \end{cases}$

Mặt khác đường thẳng đi qua $M(-1;1;3)$ nên chọn phương án $\begin{cases} x=-1-t \\ y=1+t \\ z=3+t. \end{cases}$

Chọn phương án **D.** □

6.61 (Đề minh họa 2016). Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng d có phương trình $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt d.

A. $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{1}$.
B. $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{1}$.
C. $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-2}{1}$.
D. $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$.

Lời giải.
Vì $A(1;0;2)$ không thuộc các đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{1}$ và $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$ nên loại các phương án này.
Vì Δ vuông với d nên $\vec{u}_\Delta\cdot\vec{u}_d=0$.
Kiểm tra phương án $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ có $\vec{u}_\Delta\cdot\vec{u}_d=2+2+2=6\neq 0$ nên loại phương án này.
Chọn phương án **C.** □

6.62 (Đề chính thức 2018). Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+3t \\ y=1+4t \\ z=1 \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1;1;1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-2;2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

A. $\begin{cases} x=1+7t \\ y=1+t \\ z=1+5t \end{cases}$.
B. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-10+11t \\ z=-6-5t \end{cases}$.
C. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-10+11t \\ z=6-5t \end{cases}$.
D. $\begin{cases} x=1+3t \\ y=1+4t \\ z=1-5t \end{cases}$.

Lời giải.
Đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x=1+t' \\ y=1-2t' \\ z=1+2t' \end{cases}$. Dễ thấy $A(1;1;1)$ là giao điểm của d và Δ.
Kiểm tra ta thấy tọa độ A không thỏa mãn phương trình ở phương án B nên loại phương án B.
Lấy $B(2;-1;3)\in\Delta$ và $C(1+3t;1+4t;1)\in d$.
Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-2;2)\Rightarrow AB=3$, $\overrightarrow{AC}=(3t;4t;0)\Rightarrow AC=5|t|$.
Khi đó $AB=AC\Leftrightarrow 5|t|=3\Leftrightarrow t=\pm\dfrac{3}{5}\Rightarrow C_1\left(\dfrac{14}{5};\dfrac{17}{5};1\right)$ hoặc $C_2\left(-\dfrac{4}{5};-\dfrac{7}{5};1\right)$.
Ta có $\overrightarrow{BC_1}=\left(\dfrac{4}{5};\dfrac{22}{5};-2\right)\Rightarrow BC_1=2\sqrt{6}$; $\overrightarrow{BC_2}=\left(-\dfrac{14}{5};-\dfrac{2}{5};-2\right)\Rightarrow BC_2=2\sqrt{3}$.
Vì $BC_2<BC_1$ nên ta có $\widehat{BAC_2}<90^\circ$.
Gọi M trung điểm BC_2, ta có $M\left(\dfrac{3}{5};-\dfrac{6}{5};2\right)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\left(-\dfrac{2}{5};-\dfrac{11}{5};1\right)$.
Do đó AM có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}(2;11;-5)$, suy ra loại phương án A và D.
Chọn phương án **C.** □

6.63 (Đề tham khảo 2018). Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;2;1)$, $B\left(-\dfrac{8}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{8}{3}\right)$. Đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB) có phương trình là

A. $\dfrac{x+\frac{1}{3}}{1}=\dfrac{y-\frac{5}{3}}{-2}=\dfrac{z-\frac{11}{6}}{2}$.
B. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-8}{-2}=\dfrac{z-4}{2}$.
C. $\dfrac{x+\frac{2}{9}}{1}=\dfrac{y-\frac{2}{9}}{-2}=\dfrac{z+\frac{5}{9}}{2}$.
D. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OA} = (2;2;1), \overrightarrow{OB} = \left(-\dfrac{8}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{8}{3}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right] = (4;-8;8) = 4(1;-2;2)$.
Gọi d là đường thẳng cần viết phương trình ta có một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (1;-2;2)$.
Lại có $OA = 3; OB = 4; AB = 5$.
Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB, ta có $OA.\overrightarrow{IB} + OB.\overrightarrow{IA} + AB.\overrightarrow{IO} = \vec{0}$.

Từ đó suy ra $\begin{cases} x_I = \dfrac{OAx_B + OBx_A + ABx_O}{OA+OB+AB} \\ y_I = \dfrac{OAy_B + OBy_A + ABy_O}{OA+OB+AB} \\ z_I = \dfrac{OAz_B + OBz_A + ABz_O}{OA+OB+AB} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 0 \\ y_I = 1 \\ z_I = 1 \end{cases}$, suy ra $I(0;1;1)$.

Tọa độ I thỏa mãn phương trình $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+1}{2}$ nên chọn phương án này.
Chọn phương án **D**. □

3. Vị trí tương đối

6.64 (Đề thử nghiệm 2017). Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-5}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x - 3y + 2z + 6 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. d song song với (P). **B.** d cắt và không vuông góc với (P).
C. d vuông góc với (P). **D.** d nằm trong (P).

Lời giải.
Ta có $\vec{u}_d = (1;-3;-1)$, $\vec{n}_{(P)} = (3;-3;2)$.
Dễ thấy $\vec{u}_d \neq k\vec{n}_{(P)}$ nên loại phương án d vuông góc với (P).
Lại có $\vec{u}_d \cdot \vec{n}_{(P)} = 3 + 9 - 2 = 10 \neq 0$ nên loại phương án d song song với (P) và d nằm trong (P).
Chọn phương án **B**. □

6.65 (Đề minh họa 2016). Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình $\dfrac{x-10}{5} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+2}{1}$. Xét mặt phẳng $(P): 10x + 2y + mz + 11 = 0$, m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng Δ.

A. $m = -52$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 52$.

Lời giải.
Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (10;2;m)$.
Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (5;1;1)$.
Ta có $(P) \perp \Delta \Leftrightarrow \vec{n} = k\vec{u} \Leftrightarrow \dfrac{10}{5} = \dfrac{2}{1} = \dfrac{m}{1} \Leftrightarrow m = 2$.
Chọn phương án **C**. □

6.66 (Đề thử nghiệm 2017). Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5;-6;-2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M. Tính tỉ số $\dfrac{AM}{BM}$.

A. $\dfrac{AM}{BM} = 2$. **B.** $\dfrac{AM}{BM} = 3$. **C.** $\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

C1: Mặt phẳng (Oxz) có phương trình $y = 0$.
Khi đó $\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{\mathrm{d}(A,(Oxz))}{\mathrm{d}(B,(Oxz))} = \dfrac{|-3|}{|-6|} = \dfrac{1}{2}$.

C2: Ta có $\overrightarrow{AB} = (7;-9;-3)$ nên AB có phương trình tham số $\begin{cases} x = -2 + 7t \\ y = 3 - 9t \\ z = 1 - 3t. \end{cases}$

Đường thẳng AB cắt (Oxz), suy ra $y = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{3} \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{3};0;0\right)$.

Khi đó $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{7}{3}; -3; -1\right) \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{139}}{3}$; $\overrightarrow{BM} = \left(-\frac{14}{3}; -6; -2\right) \Rightarrow BM = 2\frac{\sqrt{139}}{3}$.

Vậy $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$.

Chọn phương án **C**. □

6.67 (Đề tham khảo 2017). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 6x - 2y + z - 35 = 0$ và điểm $A(-1; 3; 6)$. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P), tính OA'.

A. $OA' = 5\sqrt{3}$. **B.** $OA' = \sqrt{186}$. **C.** $OA' = 3\sqrt{26}$. **D.** $OA' = \sqrt{46}$.

Lời giải.

Đường thẳng AA' đi qua $A(-1; 3; 6)$ và nhận $\vec{n}_{(P)} = (6; -2; 1)$ làm một vectơ chỉ phương.

Do đó AA' có phương trình $\begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = 3 - 2t \\ z = 6 + t. \end{cases}$

Gọi I là giao điểm của AA' và (P) ta có $I \in AA'$ nên $I(-1 + 6t; 3 - 2t; 6 + t)$.

Lại có $I \in (P)$ nên $6(-1 + 6t) - 2(3 - 2t) + 6 + t - 35 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow I(5; 1; 7)$.

Khi đó I là trung điểm AA' nên $A'(11; -1; 8) \Rightarrow OA' = \sqrt{11^2 + (-1)^2 + 8^2} = \sqrt{186}$.

Chọn phương án **B**. □

4. Góc và khoảng cách

6.68 (Đề tham khảo 2017). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x - 2y - z + 1 = 0$ và đường thẳng $\Delta\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$. Tính khoảng cách d giữa Δ và (P).

A. $d = \frac{2}{3}$. **B.** $d = 2$. **C.** $d = \frac{5}{3}$. **D.** $d = \frac{1}{3}$.

Lời giải.

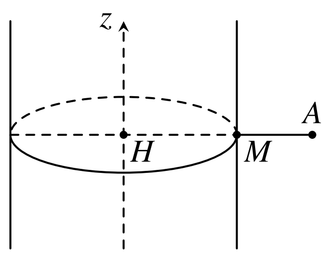
Đường thẳng Δ đi qua $A(1; -2; 1)$, do đó $d = \mathrm{d}(A, (P)) = \frac{|2 + 4 - 1 + 1|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 2$.

Chọn phương án **B**. □

6.69 (Đề chính thức 2019). Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0; 4; -3)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3. Khi khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $N(0; 3; -5)$. **B.** $Q(0; 5; -3)$. **C.** $P(-3; 0; -3)$. **D.** $M(0; -3; -5)$.

Lời giải.



Đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3 nên d nằm trên mặt trụ tròn xoay có trục là Oz và bán kính bằng 3. Hình chiếu của A trên trục Oz là $H(0; 0; -3)$, suy ra $\overrightarrow{AH} = (0; -4; 0)$, do đó $\mathrm{d}(A, Oz) = AH = 4$. Ta có $\mathrm{d}(A; d) \geqslant |\mathrm{d}(A; Oz) - \mathrm{d}(d; Oz)| = 1$. Dấu "=" xảy ra khi d đi qua điểm B là giao điểm của AH và mặt trụ sao cho $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AH} \Rightarrow B(0; 3; -3)$. Khi đó d đi qua B và song song Oz nên có phương trình $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = -3 + t \end{cases}$. Vậy, d đi qua $N(0; 3; -5)$.

Chọn phương án **A**. □

§4. Bài Toán Tổng Hợp

1. Phương trình mặt cầu

6.70 (Đề thử nghiệm 2017). Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu có tâm $I(1; 2; -1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P)\colon x - 2y - 2z - 8 = 0$?

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$. B. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$.
C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$. D. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$.

Lời giải.
Từ tọa độ tâm $I(1;2;-1)$ ta loại phương án $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$ và $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$.
Mặt cầu tiếp xúc với (P) nên có bán kính $R=\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|1-4+2-8|}{\sqrt{1+4+4}}=3$, do đó loại phương án $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$.
Chọn phương án **A.** □

6.71 (Đề minh họa 2016). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+2z+2=0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình của mặt cầu (S).
A. $(S)\colon (x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=8$. B. $(S)\colon (x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=10$.
C. $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=10$. D. $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=8$.

Lời giải.
Từ tâm $I(2;1;1)$ ta loại phương án A và B.
Ta có $\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|4+1+2+2|}{\sqrt{4+1+4}}=3$, suy ra $R=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$ nên loại phương án C.
Chọn phương án **C.** □

6.72 (Đề thử nghiệm 2017). Trong không gian $Oxyz$, xét các điểm $A(0;0;1)$, $B(m;0;0)$, $C(0;n;0)$, $D(1;1;1)$ với $m>0; n>0$ và $m+n=1$. Biết rằng khi m,n thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) và đi qua D. Tính bán kính R của mặt cầu đó?
A. $R=\dfrac{3}{2}$. B. $R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. C. $R=1$. D. $R=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.
Gọi $I(a;b;c)$ và $R>0$ lần lượt là tâm và bán kính mặt cầu.
Khi đó mặt cầu có phương trình $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.
Mặt cầu đi qua D nên $(1-a)^2+(1-b)^2+(1-c)^2=R^2$. (1)
Mặt phẳng (ABC) có phương trình $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}+\dfrac{z}{1}=1 \Leftrightarrow nx+my+mnz-mn=0$.
Mặt phẳng (ABC) tiếp xúc với mặt cầu nên $d(I,(ABC))=R \Leftrightarrow \dfrac{|na+mb+mnc-mn|}{\sqrt{n^2+m^2+(mn)^2}}=R$.
Ta có $m+n=1$ và $m,n>0$ nên $\sqrt{n^2+m^2+(mn)^2}=1-mn$.
Suy ra $|na+mb+mnc-mn|=R(1-mn)$.

<u>TH1</u>: $na+mb+mnc-mn=R(1-mn)$, thay $n=1-m$ vào ta có

$$\begin{aligned}&(1-m)a+mb+m(1-m)c-m(1-m)=R(1-m(1-m))\\ \Leftrightarrow&(R+c-1)m^2+(a-b-c-R+1)m+R-a=0 \qquad (2)\end{aligned}$$

Phương trình (2) đúng với mọi $m\in(0;1)$ nên $\begin{cases}R+c-1=0\\ a-b-c-R+1=0\\ R-a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=R\\ b=R\\ c=1-R.\end{cases}$
Lại thay $a=b=R, c=1-R$ vào (1) được $(1-R)^2+(1-R)^2+R^2=R^2 \Leftrightarrow R=1$.

<u>TH2</u>: $na+mb+mnc-mn=-R(1-mn)$, thay $n=1-m$ vào ta có

$$\begin{aligned}&(1-m)a+mb+m(1-m)c-m(1-m)=-R(1-m(1-m))\\ \Leftrightarrow&(R-c+1)m^2+(b+c-a-R-1)m+R+a=0 \qquad (3)\end{aligned}$$

Phương trình (3) đúng với mọi $m\in(0;1)$ nên $\begin{cases}R-c+1=0\\ b+c-a-R-1=0\\ R+a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-R\\ b=-R\\ c=R+1.\end{cases}$
Lại thay $a=b=-R, c=R+1$ vào (1) được $(1+R)^2+(1+R)^2+R^2=R^2 \Leftrightarrow R=-1$ (không thỏa mãn).

Chọn phương án **C.** □

6.73 (Đề chính thức 2019). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+\left(z+\sqrt{2}\right)^2=3$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A\,(a;b;c)$ (a,b,c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

A. 4. **B**. 8. **C**. 12. **D**. 16.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I\left(0;0;-\sqrt{2}\right)$, bán kính $R=\sqrt{3}$. Ta có $\mathrm{d}\left[I,(Oxy)\right]=\sqrt{2}<R$, suy ra (Oxy) cắt mặt cầu (S). Để tồn tại tiếp tuyến với (S) đi qua A thì A nằm trên (S) hoặc A nằm ngoài (S).

TH1: Điểm A nằm trên (S), ta có $IA=R\Leftrightarrow IA=\sqrt{3}$. Khi đó có vô số tiếp tuyến đi qua A nằm trên mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại A, nên luôn tồn tại ít nhất hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

TH2: Điểm A nằm ngoài (S), ta có $IA>R\Leftrightarrow IA>\sqrt{3}$. Khi đó các tiếp tuyến của (S) đi qua A nằm trên một mặt nón đỉnh A. Gọi 2β là góc ở đỉnh của hình nón này. Tồn tại ít nhất hai tiếp tuyến vuông góc với nhau khi và chỉ khi $2\beta\geqslant 90^\circ$, hay $\beta\geqslant 45^\circ$. Vì $\beta<90^\circ$ nên ta có

$$\beta\geqslant 45^\circ\Leftrightarrow \sin\beta\geqslant\sin 45^\circ\Leftrightarrow\frac{R}{IA}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow IA\leqslant\sqrt{6}.$$

Kết hợp hai trường hợp, ta có $\sqrt{3}\leqslant IA\leqslant\sqrt{6}\Leftrightarrow 3\leqslant IA^2\leqslant 6.$ (1)

Vì $A\in(Oxy)$ nên $A(a;b;0)\Rightarrow\overrightarrow{IA}=\left(a;b;\sqrt{2}\right)\Rightarrow IA=\sqrt{a^2+b^2+2}$, do đó

$$(1)\Leftrightarrow 3\leqslant a^2+b^2+2\leqslant 6\Leftrightarrow 1\leqslant a^2+b^2\leqslant 4. \qquad (2)$$

Từ (2), ta có $0\leqslant a^2\leqslant 4$ và $0\leqslant b^2\leqslant 4$. Vì $a,b\in\mathbb{Z}$ nên ta có

- $a=0\Rightarrow b\in\{-1;1;-2;2\}$, suy ra có 4 điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán;
- $a=\pm1\Rightarrow b\in\{0;-1;1\}$, suy ra có 6 điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán;
- $a=\pm2\Rightarrow b=0$, suy ra có 2 điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy, tổng cộng có 12 điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án **C.** □

2. Phương trình mặt phẳng

6.74 (Đề chính thức 2020). Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-2;3)$ và đường thẳng $d\colon\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-1}$. Mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d có phương trình là

A. $3x+2y-z-1=0$. **B**. $3x+2y-z+1=0$.

C. $2x-2y+3z-17=0$. **D**. $2x-2y+3z+17=0$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;2;-1)$.

Mặt phẳng vuông góc với d nên nhận $\vec{u}=(3;2;-1)$ làm một vectơ pháp tuyến.

Mặt phẳng đi qua $M(2;-2;3)$ nên có phương trình

$$3(x-2)+2(y+2)-(z-3)=0\Leftrightarrow 3x+2y-z+1=0.$$

Chọn phương án **B.** □

6.75 (Đề chính thức 2017). Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(3;-1;1)$ và vuông góc đường thẳng $\Delta\colon\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-3}{1}$?

A. $3x+2y+z-8=0$. **B**. $x-2y+3z+3=0$.

C. $3x-2y+z+12=0$. **D**. $3x-2y+z-12=0$.

Lời giải.

C1: Ta có mặt phẳng vuông góc với Δ nên nhận $\vec{u}_\Delta = (3; -2; 1)$ làm một vectơ pháp tuyến.
Mặt phẳng đi qua $M(3; -1; 1)$ nên có phương trình $3x - 2y + z - 12 = 0$.

C2: Mặt phẳng vuông góc với Δ nên nhận $\vec{u}_\Delta = (3; -2; 1)$ làm một vectơ pháp tuyến, do đó loại phương án $x - 2y + 3z + 3 = 0$.
Thay tọa độ M vào mặt phẳng $3x - 2y + z + 12 = 0$ có $9 + 2 + 1 + 12 = 0$, không thỏa mãn nên loại phương án $3x - 2y + z + 12 = 0$.
Thay tọa độ M vào mặt phẳng $3x + 2y + z - 8 = 0$ có $9 + 2 + 1 - 8 = 0$, không thỏa mãn nên loại phương án $3x + 2y + z - 8 = 0$.

Chọn phương án **D.** □

6.76 (Đề tham khảo 2020). Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; 1; 0)$ và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z+1}{-2}$. Mặt phẳng đi qua M và vuông góc với Δ có phương trình là

A. $x + 4y - 2z + 6 = 0$. **B.** $3x + y - z + 7 = 0$.
C. $x + 4y - 2z - 6 = 0$. **D.** $3x + y - z - 7 = 0$.

Lời giải.
Mặt phẳng đi qua M và vuông góc với Δ nên nhận $\vec{u}_\Delta = (1; 4; -2)$ làm một vectơ pháp tuyến.
Vậy mặt phẳng có phương trình $1(x - 2) + 4(y - 1) - 2(z - 0) = 0 \Leftrightarrow x + 4y - 2z - 6 = 0$.
Chọn phương án **C.** □

6.77 (Đề tham khảo 2020). Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 1; -1)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{1}$ có phương trình là

A. $x - 2y - z - 2 = 0$. **B.** $2x + 2y + z - 3 = 0$.
C. $2x + 2y + x + 3 = 0$. **D.** $x - 2y - z = 0$.

Lời giải.
Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; 2; 1)$.
Mặt phẳng cần tìm vuông góc với Δ nên nhận $\vec{u} = (2; 2; 1)$ là một vectơ pháp tuyến.
Vậy mặt phẳng cần tìm có phương trình

$$2(x - 1) + 2(y - 1) + 1(z + 1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + z - 3 = 0.$$

Chọn phương án **B.** □

6.78 (Đề tham khảo 2017). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(3; 2; -1)$ và đi qua điểm $A(2; 1; 2)$. Mặt phẳng nào dưới đây tiếp xúc với (S) tại A?

A. $x + y - 3z - 8 = 0$. **B.** $x - y - 3z + 3 = 0$. **C.** $x + y + 3z - 9 = 0$. **D.** $x + y - 3z + 3 = 0$.

Lời giải.
Mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại A nhận $\overrightarrow{AI} = (1; 1; -3)$ làm một vectơ pháp tuyến.
Vậy mặt phẳng có phương trình $1(x - 2) + 1(y - 1) - 3(z - 2) = 0 \Leftrightarrow x + y - 3z + 3 = 0$.
Chọn phương án **D.** □

6.79 (Đề chính thức 2017). Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + t \\ z = 2 \end{cases}$, $d_2\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x + 2y - 3z = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua giao điểm của d_1 và (P), đồng thời vuông góc với d_2?

A. $2x - y + 2z + 22 = 0$. **B.** $2x - y + 2z - 13 = 0$.
C. $2x + y + 2z - 22 = 0$. **D.** $2x - y + 2z + 13 = 0$.

Lời giải.
Mặt phẳng vuông góc với d_2 nên nhận $\vec{u}_{d_2} = (2; -1; 2)$ làm một vectơ pháp tuyến, suy ra loại phương án $2x + y + 2z - 22 = 0$.
Thay d_1 vào (P) ta có $2(1 + 3t) + 2(-2 + t) - 3 \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow 8t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 1$, suy ra d_1 cắt (P) tại $M(4; -1; 2)$.

Thay tọa độ M vào mặt phẳng $2x - y + 2z + 22 = 0$ được $8 + 1 + 4 + 22 = 0$, không thỏa mãn nên loại phương án $2x - y + 2z + 22 = 0$.
Thay tọa độ M vào mặt phẳng $2x - y + 2z + 13 = 0$ được $8 + 1 + 4 + 13 = 0$, không thỏa mãn nên loại phương án $2x - y + 2z + 13 = 0$.
Chọn phương án **B.** □

6.80 (Đề thử nghiệm 2017). Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$ và $d_2: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-2}{-1}$.

A. $(P)\colon 2x - 2z + 1 = 0$. **B.** $(P)\colon 2x - 2y + 1 = 0$.
C. $(P)\colon 2y - 2z - 1 = 0$. **D.** $(P)\colon 2y - 2z + 1 = 0$.

Lời giải.
Ta có $\vec{u}_1 = (-1; 1; 1)$, $\vec{u}_2 = (2; -1; -1) \Rightarrow \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right] = (0; 1; -1)$.
Mặt phẳng (P) song song với d_1, d_2 nên nhận $\left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right] = (0; 1; -1)$ làm một vectơ pháp tuyến, do đó ta loại phương án $(P)\colon 2x - 2z + 1 = 0$ và $(P)\colon 2x - 2y + 1 = 0$.
Xét phương án $(P)\colon 2y - 2z + 1 = 0$ và $M_1(2; 0; 0) \in d_1$, $M_2(0; 1; 2) \in d_2$.
Ta có $\mathrm{d}(d_1, (P)) = \mathrm{d}(M_1, (P)) = \dfrac{|1|}{\sqrt{4+4}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$; $\mathrm{d}(d_2, (P)) = \mathrm{d}(M_2, (P)) = \dfrac{|2-4+1|}{\sqrt{4+4}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, do đó chọn phương án này.
Chọn phương án **D.** □

6.81 (Đề chính thức 2018). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 9$ và điểm $A(2; 3; -1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S), M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

A. $6x + 8y + 11 = 0$. **B.** $3x + 4y - 2 = 0$. **C.** $6x + 8y - 11 = 0$. **D.** $3x + 4y + 2 = 0$.

Lời giải.
Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; -1; -1)$ và bán kính $R = 3$.
Từ đó ta có $\overrightarrow{IA} = (3; 4; 0) \Rightarrow IA = 5$, $AM = \sqrt{IA^2 - R^2} = 4$.
Gọi H là hình chiếu của M trên AI, ta có $\triangle AHM \sim \triangle AMI \Rightarrow AH = \dfrac{AM^2}{AI} = \dfrac{16}{5}$.
Gọi $H(x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (x-2; y-3; z+1)$. Khi đó $\overrightarrow{AH} = \dfrac{16}{25}\overrightarrow{AI} \Rightarrow H\left(\dfrac{2}{25}; \dfrac{11}{25}; -1\right)$.
Mặt phẳng chứa M đi qua H và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{IA} = (3; 4; 0)$.
Vậy mặt phẳng có phương trình $3\left(x - \dfrac{2}{25}\right) + 4\left(y - \dfrac{11}{25}\right) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 2 = 0$.
Chọn phương án **B.** □

6.82 (Đề tham khảo 2018). Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 1)$, $B(3; -1; 1)$ và $C(-1; -1; 1)$. Gọi (S_1) là mặt cầu có tâm A, bán kính bằng 2; (S_2) và (S_3) là hai mặt cầu có tâm lần lượt là B, C và bán kính đều bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu $(S_1), (S_2), (S_3)$?

A. 6. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải.
Giả sử $(P)\colon ax + by + cz + d = 0$ $(a^2 + b^2 + c^2 > 0)$ là mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu.

Ta có $\begin{cases} \mathrm{d}(A, (P)) = 2 \\ \mathrm{d}(B, (P)) = 1 \\ \mathrm{d}(C, (P)) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a + 2b + c + d| = 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} & (1) \\ |3a - b + c + d| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} & (2) \\ |-a - b + c + d| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. & (3) \end{cases}$

Từ (2) và (3) ta có $|3a - b + c + d| = |-a - b + c + d| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a - b + c + d = 0. \end{array}\right.$

Với $a = 0$ ta có

$$\begin{cases} |2b + c + d| = 2\sqrt{b^2 + c^2} \\ |2b + c + d| = 2|-b + c + d| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2b + c + d| = 2\sqrt{b^2 + c^2} \\ \left[\begin{array}{l} c + d = 0 \\ c + d = 4b \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = d = 0, b \neq 0 \\ c = \pm 2\sqrt{2}b, c + d = 4b. \end{array}\right.$$

Do đó trường hợp này có 3 mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $a-b+c+d=0$ ta có

$$\begin{cases}|3b|=2\sqrt{a^2+b^2+c^2}\\|2a|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|3b|=|4a|\\|2a|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|3b|=|4a|\\|3c|=\sqrt{11}|a|.\end{cases}$$

Do đó trường hợp này có 4 mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Vậy có tất cả 7 mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn phương án **D.** □

3. Phương trình đường thẳng

6.83 (Đề tham khảo 2018). Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$; $d_2: \dfrac{x-5}{-3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng (P): $x+2y+3z-5=0$. Đường thẳng vuông góc với (P), cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+2}{3}$. **B.** $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$.
C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$. **D.** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{3}$.

Lời giải.
Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;2;3)$.
Giả sử đường thẳng cắt d_1 tại A và d_2 tại B.
Ta có $A(3-t;3-2t;-2+t), B(5-3t';-1+2t';2+t')$.
Suy ra $\overrightarrow{AB}=(2+t-3t';-4+2t+2t';4-t+t')$.
Khi đó $\left[\vec{n},\overrightarrow{AB}\right]=(20-8t-4t';2+4t-10t';-8+8t')$.

Đường thẳng vuông góc với (P) nên $\left[\vec{n},\overrightarrow{AB}\right]=0\Leftrightarrow\begin{cases}20-8t-4t'=0\\2+4t-10t'=0\\-8+8t'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=2\\t'=1.\end{cases}$

Suy ra $A(1;-1;0)$ nên đường thẳng có phương trình $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$.
Chọn phương án **C.** □

6.84 (Đề tham khảo 2019). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{-5}$. **B.** $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z+1}{5}$.
C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+5}{1}$. **D.** $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Lời giải.

Đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases}x=t\\y=-1+2t\\z=2-t.\end{cases}$

Thay d vào (P) ta có $t+(-1+2t)+(2-t)-3=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow d$ cắt (P) tại $A(1;1;1)$.
Loại phương án A và D vì tọa độ A không thỏa mãn các đường thẳng ở các phương án này.

Lấy $M(0;-1;2)\in d$, gọi H là hình chiếu của M trên (P), suy ra MH có phương trình $\begin{cases}x=t\\y=-1+t\\z=2+t.\end{cases}$

Thay MH vào (P) ta có $t+(-1+t)+(2+t)-3=0\Leftrightarrow t=\dfrac{2}{3}\Rightarrow H\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3};\dfrac{8}{3}\right)$.

Khi đó $\overrightarrow{AH}=\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{4}{3};\dfrac{5}{3}\right)$, hay AH có một vectơ chỉ phương $\vec{u}(1;4;-5)$.

Vậy AH có phương trình $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{-5}$.

Chọn phương án **A**. □

6.85 (Đề tham khảo 2017). Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+5}{-1} = \dfrac{z-3}{4}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng $x+3=0$?

A. $\begin{cases} x=-3 \\ y=-5-t \\ z=-3+4t \end{cases}$.
B. $\begin{cases} x=-3 \\ y=-5+2t \\ z=3-t \end{cases}$.
C. $\begin{cases} x=-3 \\ y=-5+t \\ z=3+4t \end{cases}$.
D. $\begin{cases} x=-3 \\ y=-6-t \\ z=7+4t \end{cases}$.

Lời giải.
Đường thẳng d đi qua hai điểm $M(1;-5;3)$ và $N(3;-6;7)$.
Khi đó hình chiếu của M, N trên mặt phẳng $x+3=0$ lần lượt là $M'(-3;-5;3)$, $N'(-3;-6;7)$.
Ta có $\overrightarrow{M'N'} = (0;-1;4)$. Do đó hình chiếu của d trên $x+3=0$ có phương trình $\begin{cases} x=-3 \\ y=-6-t \\ z=7+4t. \end{cases}$
Chọn phương án **D**. □

4. Bài toán cực trị

6.86 (Đề tham khảo 2019). Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-8=0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc (P), giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng

A. 135. **B.** 105. **C.** 145. **D.** 108.

Lời giải.
Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
Ta có $\begin{cases} 2(2-x)+3(-3-x)=0 \\ 2(-2-y)+3(3-y)=0 \\ 2(4-z)+3(-1-z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x-5=0 \\ -5y+5=0 \\ -5z+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow I(-1;1;1).$
Khi đó

$$\begin{aligned} 2MA^2+3MB^2 &= 2\overrightarrow{MA}^2+3\overrightarrow{MB}^2 = 2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2 \\ &= 5\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\left(2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}\right)+2\overrightarrow{IA}^2+3\overrightarrow{IB}^2 = 5MI^2+2IA^2+3IB^2. \end{aligned}$$

Vì I, A, B cố định nên $2MA^2+3MB^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $5MI^2$ nhỏ nhất, lúc đó M là hình chiếu của điểm I trên (P).
Khi đó IM có phương trình $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=1-t \\ z=1+2t. \end{cases}$
Thay IM vào (P) ta có $2(-1+2t)-(1-t)+2(1+2t)-8=0 \Leftrightarrow 9t-9=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow M(1;0;3)$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2 = 5MI^2+2IA^2+3IB^2 = 135$.
Chọn phương án **A**. □

6.87 (Đề chính thức 2017). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=9$, điểm $M(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-4=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M, nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho AB nhỏ nhất. Biết rằng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}(1;a;b)$. Tính $T=a-b$.

A. $T=-1$. **B.** $T=1$. **C.** $T=-2$. **D.** $T=0$.

Lời giải.
Đường thẳng Δ có phương trình $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+at \\ z=2+bt. \end{cases}$
Thay Δ vào (P) được $1+t+1+at+2+bt-4=0 \Leftrightarrow (a+b+1)t=0$.
Ta có $\Delta \subset (P)$ nên $(a+b+1)t=0$ đúng với mọi $t \in \mathbb{R}$, suy ra $a+b+1=0 \Leftrightarrow a=-b-1$. (1)
Thay Δ vào (S) ta có $(1+t)^2+(1+at)^2+(2+bt)^2=9$.
Hay $(a^2+b^2+1)t^2+(2a+4b+2)t-3=0$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2(b^2+b+1)t^2+2bt-3=0$, phương trình này luôn có hai nghiệm phân biệt.
Giả sử phương trình có 2 nghiệm t_1, t_2, ta có $t_1+t_2=-\dfrac{b}{b^2+b+1}, t_1t_2=-\dfrac{3}{2(b^2+b+1)}$.
Khi đó Δ cắt (S) tại $A(1+t_1;1+(-b-1)t_1;2+bt_1)$ và $B(1+t_2;1+(-b-1)t_2;2+bt_2)$.
Suy ra $\overrightarrow{AB}=(t_2-t_1;(-b-1)(t_2-t_1);b(t_2;t_1))$.
Do đó $AB=\sqrt{(t_2-t_1)^2+(b^2+2b+1)(t_2-t_1)^2+b^2(t_2-t_1)^2}=\sqrt{2(b^2+b+1)\left[(t_1+t_2)^2-4t_1t_2\right]}$.
Hay $AB=\sqrt{2(b^2+b+1)\left[\dfrac{b^2}{(b^2+b+1)^2}+\dfrac{6}{b^2+b+1}\right]}=\sqrt{\dfrac{2b^2}{b^2+b+1}+12}\geqslant\sqrt{12}$.
Dấu bằng xảy ra khi $b=0\Rightarrow a=-1$. Vậy $T=a-b=-1$.
Chọn phương án **A**. □

6.88 (Đề tham khảo 2017). Cho mặt cầu tâm O, bán kính R. Xét mặt phẳng (P) thay đổi cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C). Hình nón (N) có đỉnh S nằm trên mặt cầu, có đáy là đường tròn (C) và có chiều cao là h $(h>R)$. Tính h để thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) có giá trị lớn nhất.

A. $h=\dfrac{4R}{3}$. **B**. $h=\sqrt{3}R$. **C**. $h=\dfrac{3R}{2}$. **D**. $h=\sqrt{2}R$.

Lời giải.
Gọi I, r lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn (C).
Ta có $OI=SI-SO=h-R$, suy ra $r=\sqrt{R^2-OI^2}=\sqrt{-h^2+2Rh}$.
Thể tích của khối nón (N) là $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{\pi}{3}(-h^3+2Rh^2)$.
Xét hàm số $f(h)=-h^3+2Rh^2$ trên $(R;2R)$ có $f'(h)=-3h^2+4Rh$; $f'(h)=0\Leftrightarrow h=\dfrac{4R}{3}$.
Bảng biến thiên

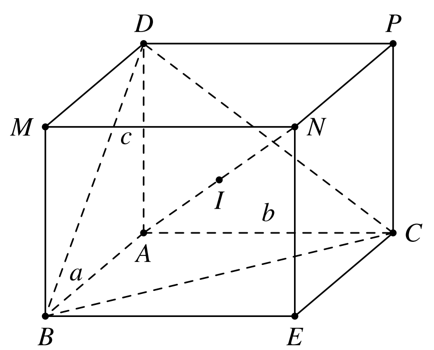
h	R		$\frac{4R}{3}$		$2R$
$f'(h)$		$+$	0	$-$	
$f(h)$	R^3	$\nearrow$	$\frac{32}{27}R^3$	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên suy ra V đạt giá trị lớn nhất khi $h=\dfrac{4R}{3}$.
Chọn phương án **A**. □

6.89 (Đề chính thức 2018). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-2;1;2)$ và đi qua điểm $A(1;-2;-1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

A. 72. **B**. 36. **C**. 216. **D**. 108.

Lời giải.
Đặt $AB=a$, $AC=b$, $AD=c$ thì $ABCD$ là tứ diện vuông đỉnh A, nội tiếp mặt cầu (S).
Khi đó $ABCD$ là tứ diện đặt ở góc A của hình hộp chữ nhật tương ứng có các cạnh AB, AC, AD và đường chéo AA' là đường kính của cầu. Ta có $a^2+b^2+c^2=4R^2$.

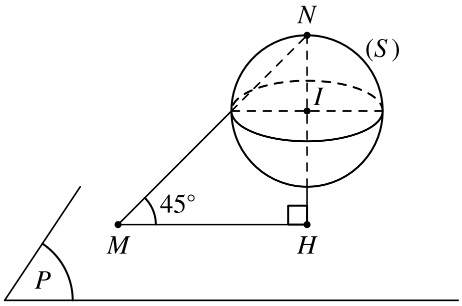


Xét $V=V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}abc\Leftrightarrow V^2=\dfrac{1}{36}a^2b^2c^2$.
Mà $a^2+b^2+c^2\geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\Leftrightarrow\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3\geqslant a^2b^2c^2$.
Hay $\left(\dfrac{4R^2}{3}\right)^3\geqslant 36\cdot V^2\Leftrightarrow V\leqslant R^3\cdot\dfrac{4\sqrt{3}}{27}$.
Với $R=IA=3\sqrt{3}$. Vậy $V_{\max}=36$.
Chọn phương án **B**. □

6.90 (Đề tham khảo 2017). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$. Giả sử điểm $M\in(P)$ và $N\in(S)$ sao cho vectơ $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{u}(1;0;1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN.

A. $MN = 14$. **B.** $MN = 3$. **C.** $MN = 3\sqrt{2}$. **D.** $MN = 1 + 2\sqrt{2}$.

Lời giải.
Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và bán kính $R = \sqrt{1+4+1-5} = 1$.
Đường thẳng MN nhận $\overrightarrow{u}(1;0;1)$ làm một vectơ chỉ phương.
Mặt phẳng (P) nhận $\overrightarrow{n}(1;-2;2)$ làm một vectơ pháp tuyến.
Gọi α là góc giữa MN và (P) ta có $\sin\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{n}|} = \dfrac{|1+0+2|}{\sqrt{1+0+1}\cdot\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

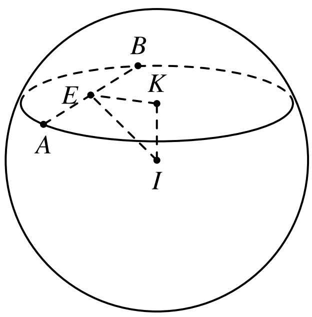


Gọi H là hình chiếu của N trên (P) ta có $\widehat{NMH} = \alpha$, suy ra $MN = \dfrac{NH}{\sin\alpha} = \sqrt{2}NH$.
Do đó MN đạt giá trị lớn nhất khi NH đạt giá trị lớn nhất.
Vì $N \in (S)$ nên NH đạt giá trị lớn nhất khi NH đi qua I.
Khi đó $NH = R + \mathrm{d}(I,(P)) = 1 + \dfrac{|-1-4+2-3|}{\sqrt{1+4+4}} = 3$, suy ra $MN = 3\sqrt{2}$.
Chọn phương án **C.** □

6.91 (Đề tham khảo 2019). Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng $(P): 2x+2y-z-3=0$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2 = 36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x = 2-5t \\ y = 1+3t \\ z = 3 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 2+9t \\ y = 1+9t \\ z = 3+8t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 2+4t \\ y = 1+3t \\ z = 3-3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-t \\ z = 3 \end{cases}$.

Lời giải.
Mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;5)$ và bán kính $R = 6$.
Ta có $\overrightarrow{IE} = (-1;-1;-2) \Rightarrow IE = \sqrt{6} < R$ nên E nằm trong mặt cầu (S).
Gọi K là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P), ta có (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn tâm K.
Gọi A, B là hai giao điểm của Δ với (S), suy ra A, B nằm trên đường tròn (K).
Gọi H là hình chiếu của K trên Δ, ta có $KH \leqslant KE$.
Theo giả thiết AB nhỏ nhất nên KH lớn nhất, suy ra $H \equiv E$ hay $KE \perp \Delta$.



Khi đó $\begin{cases} IK \perp \Delta \\ KE \perp \Delta \end{cases} \Rightarrow \Delta(IKE) \Rightarrow \Delta IE$.
Do đó $\overrightarrow{u_\Delta} = \left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{EI}\right] = (5;-5;0) = 5\,(1;-1;0)$.
Vậy Δ có phương trình là $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-t \\ z = 3. \end{cases}$
Chọn phương án **D.** □

Chuyên đề 7

Số Phức

§1. Số Phức, Phép Toán Số Phức

1. Các yếu tố của số phức

7.1 (Đề chính thức 2020). Phần thực của số phức $z = -3 - 4i$ bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** -4. **D.** -3.

Lời giải.
Số phức $z = -3 - 4i$ có phần thực bằng -3.
Chọn phương án **D.** □

7.2 (Đề chính thức 2018). Số phức $-3 + 7i$ có phần ảo bằng

A. -7. **B.** -3. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải.
Số phức $-3 + 7i$ có phần ảo bằng 7.
Chọn phương án **D.** □

7.3 (Đề tham khảo 2017). Ký hiệu a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $3 - 2\sqrt{2}i$. Tìm a, b.

A. $a = 3, b = -2\sqrt{2}$. **B.** $a = 3, b = 2\sqrt{2}$. **C.** $a = 3, b = \sqrt{2}$. **D.** $a = 3, b = 2$.

Lời giải.
Số phức $3 - 2\sqrt{2}i$ có phần thực $a = 3$ và phần ảo $b = -2\sqrt{2}$.
Chọn phương án **A.** □

7.4 (Đề chính thức 2017). Số phức nào dưới đây là số thuần ảo?

A. $z = 3i$. **B.** $z = \sqrt{3} + i$. **C.** $z = -2 + 3i$. **D.** $z = -2$.

Lời giải.
Số thuần ảo là số phức dạng $z = bi$ nên $z = 3i$ là số thuần ảo.
Chọn phương án **A.** □

7.5 (Đề chính thức 2019). Số phức liên hợp của số phức $3 - 4i$ là

A. $-3 + 4i$. **B.** $3 + 4i$. **C.** $-4 + 3i$. **D.** $-3 - 4i$.

Lời giải.
Số phức liên hợp của số phức $z = a + bi$ là số phức $\bar{z} = a - bi$.
Chọn phương án **B.** □

7.6 (Đề chính thức 2020). Số phức liên hợp của số phức $z = -3 + 5i$ là

A. $\bar{z} = 3 - 5i$. **B.** $\bar{z} = -3 + 5i$. **C.** $\bar{z} = -3 - 5i$. **D.** $\bar{z} = 3 + 5i$.

Lời giải.
Số phức liên hợp của số phức $z = -3 + 5i$ là $\bar{z} = -3 - 5i$
Chọn phương án **C.** □

7.7 (Đề tham khảo 2020). Số phức liên hợp của số phức $z = 2 + i$ là

A. $\bar{z} = 2 + i$. **B.** $\bar{z} = -2 + i$. **C.** $\bar{z} = -2 - i$. **D.** $\bar{z} = 2 - i$.

Lời giải.
Số phức liên hợp của $z = a + bi$ là $\bar{z} = a - bi$, do đó số phức liên hợp của $z = 2 + i$ là $\bar{z} = 2 - i$.
Chọn phương án **D.** □

7.8 (Đề minh họa 2016). Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$.

A. Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng 2. **B.** Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng $2i$.

C. Phần thực bằng -3 và Phần ảo bằng $-2i$. **D.** Phần thực bằng -3 và Phần ảo bằng -2.

Lời giải.

Ta có $\bar{z} = 3 + 2i$ nên $\bar{z}$ có Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng 2.

Chọn phương án **A.** □

7.9 (Đề tham khảo 2020). Môđun của số phức $1 + 2i$ bằng

A. 3. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 5. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $|1 + 2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Chọn phương án **B.** □

2. Tính toán số phức

7.10 (Đề chính thức 2020). Cho hai số phức $z_1 = 3 + 2i$ và $z_2 = 1 - i$. Số phức $z_1 - z_2$ bằng

A. $-2 - 3i$. **B.** $-2 + 3i$. **C.** $2 + 3i$. **D.** $2 - 3i$.

Lời giải.

Ta có $z_1 - z_2 = (3 + 2i) - (1 - i) = 2 + 3i$.

Chọn phương án **C.** □

7.11 (Đề chính thức 2020). Cho hai số phức $z_1 = 3 - 2i$ và $z_2 = 2 + i$. Số phức $z_1 + z_2$ bằng

A. $-5 + i$. **B.** $-5 - i$. **C.** $5 - i$. **D.** $5 + i$.

Lời giải.

Ta có $z_1 + z_2 = (3 - 2i) + (2 + i) = 5 - i$.

Chọn phương án **C.** □

7.12 (Đề minh họa 2016). Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Tính môđun của số phức $z_1 + z_2$.

A. $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$. **B.** $|z_1 + z_2| = 1$. **C.** $|z_1 + z_2| = 5$. **D.** $|z_1 + z_2| = \sqrt{13}$.

Lời giải.

Ta có $z_1 + z_2 = 1 + i + 2 - 3i = 3 - 2i$, suy ra $|z_1 + z_2| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$.

Chọn phương án **D.** □

7.13 (Đề chính thức 2017). Cho hai số phức $z_1 = 5 - 7i$ và $z_2 = 2 + 3i$. Tìm số phức $z = z_1 + z_2$.

A. $z = -2 + 5i$. **B.** $z = 2 + 5i$. **C.** $z = 3 - 10i$. **D.** $z = 7 - 4i$.

Lời giải.

Ta có $z_1 + z_2 = (5 - 7i) + (2 + 3i) = 7 - 4i$.

Chọn phương án **D.** □

7.14 (Đề tham khảo 2020). Cho hai số phức $z_1 = 2 + i$ và $z_2 = 1 + 3i$. Phần thực của số phức $z_1 + z_2$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** -2. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $z_1 + z_2 = 2 + i + 1 + 3i = 3 + 4i$, do đó phần thực của $z_1 + z_2$ bằng 3.

Chọn phương án **A.** □

7.15 (Đề tham khảo 2020). Cho hai số phức $z_1 = -3 + i$ và $z_2 = 1 - i$. Phần ảo của số phức $z_1 + \overline{z_2}$ bằng

A. -2. **B.** $2i$. **C.** 2. **D.** $-2i$.

Lời giải.

Ta có $\overline{z_2} = 1 + i \Rightarrow z_1 + \overline{z_2} = (-3 + i) + (1 + i) = -2 + 2i$.

Vậy phần ảo của $z_1 + \overline{z_2}$ bằng 2.

Chọn phương án **C.** □

7.16 (Đề minh họa 2016). Cho số phức $z = 2 + 5i$. Tìm số phức $w = iz + \bar{z}$.

A. $w = 3 + 7i$. **B.** $w = -3 - 3i$. **C.** $w = 7 - 3i$. **D.** $w = -7 - 7i$.

Lời giải.

Ta có $w = i(2 + 5i) + 2 - 5i = -3 - 3i$.

Chọn phương án **B.** □

7.17 (Đề tham khảo 2020). Cho hai số phức $z_1 = 3-i$, $z_2 = -1+i$. Phần ảo của số phức z_1z_2 bằng

A. $-i$. **B.** $4i$. **C.** 4. **D.** -1.

Lời giải.

Ta có $z_1z_2 = (3-i)(-1+i) = -2+4i$. Vậy phần ảo của z_1z_2 bằng 4.

Chọn phương án **C.** □

7.18 (Đề tham khảo 2017). Tính môđun của số phức z biết $\overline{z} = (4-3i)(1+i)$.

A. $|z| = 7\sqrt{2}$. **B.** $|z| = \sqrt{2}$. **C.** $|z| = 5\sqrt{2}$. **D.** $|z| = 25\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overline{z} = (4-3i)(1+i) = 7+i \Rightarrow z = 7-i$. Do đó $|z| = \sqrt{49+1} = 5\sqrt{2}$.

Chọn phương án **C.** □

7.19 (Đề chính thức 2020). Cho hai số phức $z = 1+2i$ và $w = 3+i$. Môđun của số phức $z \cdot \overline{w}$ bằng

A. 26. **B.** 50. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{26}$.

Lời giải.

Ta có $\overline{w} = 3-i$ nên $z\cdot\overline{w} = (1+2i)\cdot(3-i) = 5+5i$.

Vậy $|z\cdot\overline{w}| = \sqrt{5^2+5^2} = 5\sqrt{2}$.

Chọn phương án **C.** □

7.20 (Đề chính thức 2020). Cho số phức $z = 1-2i$, số phức $(2+3i)\overline{z}$ bằng

A. $-8+i$. **B.** $-4+7i$. **C.** $-4-7i$. **D.** $8+i$.

Lời giải.

Ta có $(2+3i)\overline{z} = (2+3i)(1+2i) = -4+7i$.

Chọn phương án **B.** □

7.21 (Đề thử nghiệm 2017). Tìm số phức liên hợp của số phức $z = i(3i+1)$.

A. $\overline{z} = 3+i$. **B.** $\overline{z} = -3-i$. **C.** $\overline{z} = -3+i$. **D.** $\overline{z} = 3-i$.

Lời giải.

Ta có $z = i(3i+1) = 3i^2+i = -3+i$, suy ra $\overline{z} = -3-i$.

Chọn phương án **B.** □

7.22 (Đề thử nghiệm 2017). Tính môđun của số phức z thỏa mãn $z(2-i)+13i = 1$.

A. $|z| = 34$. **B.** $|z| = \dfrac{5\sqrt{34}}{3}$. **C.** $|z| = \dfrac{\sqrt{34}}{3}$. **D.** $|z| = \sqrt{34}$.

Lời giải.

Từ giả thiết $z(2-i)+13i = 1$, ta có $z = \dfrac{1-13i}{2-i} = 3-5i$. Vậy $|z| = \sqrt{34}$.

Chọn phương án **D.** □

3. Tìm số phức thỏa mãn điều kiện cho trước

7.23 (Đề chính thức 2018). Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x-3yi)+(1-3i) = x+6i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x = 1; y = -1$. **B.** $x = -1; y = -3$. **C.** $x = 1; y = -3$. **D.** $x = -1; y = -1$.

Lời giải.

Ta có $(2x-3yi)+(1-3i) = x+6i \Leftrightarrow x+1-(3y+9)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ 3y+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-3. \end{cases}$

Chọn phương án **B.** □

7.24 (Đề tham khảo 2019). Tìm các số thực a và b thỏa mãn $2a+(b+1)i = 1+2i$ với i là đơn vị ảo.

A. $a = \dfrac{1}{2}, b = 1$. **B.** $a = 0, b = 1$. **C.** $a = 0, b = 2$. **D.** $a = 1, b = 2$.

Lời giải.

Ta có $2a+(b+1)i = 1+2i \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ b+1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = 1. \end{cases}$

Chọn phương án **A.** □

7.25 (Đề thử nghiệm 2017). Cho số phức $z = a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $(1+i)z+2\overline{z} = 3+2i$. Tính $P = a+b$.

A. $P = \frac{1}{2}$. **B.** $P = -1$. **C.** $P = 1$. **D.** $P = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $(1+i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i \Leftrightarrow (1+i)(a+bi) + 2(a-bi) = 3 + 2i \Leftrightarrow 3a - b + (a-b)i = 3 + 2i$.

Từ đó suy ra $\begin{cases} 3a - b = 3 \\ a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}$. Vậy $P = a + b = -1$.

Chọn phương án **B.** □

7.26 (Đề chính thức 2019). Cho số phức z thỏa mãn $3(\bar{z}+i)-(2-i)z = 3+10i$. Môđun của z bằng

A. 5. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 3.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$, ta có

$$\begin{aligned} 3(\bar{z}+i) - (2-i)z = 3 + 10i &\Leftrightarrow 3(x - yi + i) - (2-i)(x+yi) = 3 + 10i \\ &\Leftrightarrow (3x - 2x - y) + (-3y + 3 - 2y + x)i = 3 + 10i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ x - 5y + 3 = 10 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $z = 2 - i$, suy ra $|z| = \sqrt{5}$.

Chọn phương án **B.** □

7.27 (Đề chính thức 2017). Cho số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $z + 1 + 3i - |z|i = 0$. Tính $S = a + 3b$.

A. $S = -\frac{7}{3}$. **B.** $S = \frac{7}{3}$. **C.** $S = 5$. **D.** $S = -5$.

Lời giải.

Ta có $z + 1 + 3i - |z|i = 0 \Leftrightarrow a + bi + 1 + 3i - \sqrt{a^2+b^2}i = 0 \Leftrightarrow a + 1 + \left(b + 3 - \sqrt{a^2+b^2}\right)i = 0$.

Từ đó suy ra $\begin{cases} a = -1 \\ b + 3 = \sqrt{1+b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b \geqslant -3 \\ b^2 + 6b + 9 = 1 + b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -\frac{4}{3} \end{cases}$. Vậy $a + 3b = -5$.

Chọn phương án **D.** □

7.28 (Đề tham khảo 2017). Hỏi có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z - i| = 5$ và z^2 là số thuần ảo?

A. 4. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$ $(a, b \in \mathrm{R})$, ta có $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$.

Suy ra z^2 là số thuần ảo khi $a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2$. (1)

Lại có $|z - i| = 5 \Leftrightarrow |a + bi - i| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + (b-1)^2} = 5 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2b - 24 = 0$. (2)

Thay (1) vào (2) được $2b^2 - 2b - 24 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = -3 \\ b = 4. \end{array}\right.$

Với $b = -3 \Rightarrow a = \pm 3 \Rightarrow z = \pm 3 - 3i$; với $b = 4 \Rightarrow a = \pm 4 \Rightarrow z = \pm 4 + 4i$.

Vậy có 4 số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án **A.** □

7.29 (Đề thử nghiệm 2017). Xét số phức z thỏa mãn $(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\frac{3}{2} < |z| < 2$. **B.** $|z| < \frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$. **D.** $|z| > 2$.

Lời giải.

C1: Từ điều kiện ta có $|z| + 2 + (2|z| - 1)i = \frac{\sqrt{10}}{z}$, $(z \neq 0)$.

Lấy môđun cả hai vế được

$$(|z|+2)^2+(2|z|-1)^2=\frac{10}{|z|^2}\Leftrightarrow 5|z|^4+5|z|^2=10\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|z|^2=1\\ |z|^2=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow |z|=1.$$

C2: Từ điều kiện ta có $z=\dfrac{\sqrt{10}}{(1+2i)|z|+2-i}$. (1)

Chọn z có $|z|=1$ thay vào (1) có $z=\dfrac{\sqrt{10}}{3+i}\Rightarrow |z|=\dfrac{\sqrt{10}}{|3+i|}=1$, thỏa mãn nên chọn $\dfrac{1}{2}<|z|<\dfrac{3}{2}$.

Chọn phương án **C.** □

7.30 (Đề tham khảo 2019). Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2=2|z+\bar{z}|+4$ và $|z-1-i|=|z-3+3i|$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Ta có $|z|^2=2\,|z+\bar{z}|+4\Leftrightarrow x^2+y^2=4|x|+4$. (1)

Lại có

$$\begin{aligned}|z-1-i|=|z-3+3i|&\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y+3)^2\\&\Leftrightarrow 4x=8y+16\\&\Leftrightarrow x=2y+4.\end{aligned}\quad(2)$$

Thay (2) vào (1) ta có $(2y+4)^2+y^2=4|2y+4|+4\Leftrightarrow 5y^2+16y+12=8|y+2|$. (3)

Với $y\geqslant -2$, ta có (3) $\Leftrightarrow 5y^2+8y-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=-2\\ y=\dfrac{2}{5}\end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Với $y<-2$, ta có (3) $\Leftrightarrow 5y^2+24y+28=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=-2\ \text{(loại)}\\ y=-\dfrac{14}{5}.\end{array}\right.$

Vậy có 3 số phức thỏa điều kiện bài toán.

Chọn phương án **B.** □

7.31 (Đề chính thức 2017). Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-3i|=5$ và $\dfrac{z}{z-4}$ là số thuần ảo?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải.

Gọi $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R},z\neq 4)$, ta có $|z-3i|=5\Leftrightarrow |a+bi-3i|=5\Leftrightarrow a^2+b^2-6b-16=0$. (1)

Và $\dfrac{z}{z-4}=\dfrac{a+bi}{a+bi-4}=\dfrac{(a+bi)(a-4-bi)}{(a-4)^2+b^2}=\dfrac{a^2+b^2-4a}{(a-4)^2+b^2}-\dfrac{4b}{(a-4)^2+b^2}i$.

Do đó $\dfrac{z}{z-4}$ là số thuần ảo khi và chỉ khi $a^2+b^2-4a=0$. (2)

Trừ theo vế (1) và (2) ta có $4a-6b-16=0\Leftrightarrow a=\dfrac{3}{2}b+4$. (3)

Thay (3) vào (1) được $\dfrac{9}{4}b^2+12b+16+b^2-6b-16=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=0\\ b=-\dfrac{24}{13}.\end{array}\right.$

Với $b=0\Rightarrow a=4\Rightarrow z=4$ (loại); với $b=-\dfrac{24}{13}\Rightarrow a=\dfrac{16}{13}\Rightarrow z=\dfrac{16}{13}-\dfrac{24}{13}i$.

Vậy có 1 số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án **A.** □

7.32 (Đề tham khảo 2018). Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2+i-|z|(1+i)=0$ và $|z|>1$. Tính $P=a+b$.

A. $P=-5$. **B.** $P=3$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=7$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} z+2+i-|z|(1+i)=0 &\Leftrightarrow a+bi+2+i-\sqrt{a^2+b^2}(1+i)=0\\ &\Leftrightarrow a+2-\sqrt{a^2+b^2}+\left(b+1-\sqrt{a^2+b^2}\right)i=0\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a+2-\sqrt{a^2+b^2}=0 & (1)\\ b+1-\sqrt{a^2+b^2}=0. & (2)\end{cases}\end{aligned}$$

Trừ theo vế (1) và (2) được $a+2-b-1=0 \Leftrightarrow b=a+1$ thay vào (1) được

$$a+2=\sqrt{a^2+(a+1)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant -2\\ a^2+4a+4=2a^2+2a+1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1\\ a=3.\end{array}\right.$$

Với $a=-1 \Rightarrow b=0 \Rightarrow z=-1 \Rightarrow |z|=1$ (không thỏa mãn).
Với $a=3 \Rightarrow b=4 \Rightarrow z=3+4i \Rightarrow |z|=5$ (thỏa mãn).
Vậy $a=3; b=4$, suy ra $P=7$.
Chọn phương án **D.** □

7.33 (Đề chính thức 2018). Có bao nhiêu số phức z thoả mãn $|z|(z-4-i)+2i=(5-i)z$?

A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

Lời giải.
Ta có $|z|(z-4-i)+2i=(5-i)z \Leftrightarrow z(|z|-5+i)=4|z|+(|z|-2)i.$ (1)
Từ (1) suy ra mỗi giá trị của $|z|$ tương ứng với một giá trị của z.
Lấy môđun hai vế của (1) ta được $|z|\sqrt{(|z|-5)^2+1}=\sqrt{(4|z|)^2+(|z|-2)^2}$.
Bình phương hai vế ta có $|z|^2\left(|z|^2-10|z|+26\right)=16|z|^2+|z|^2-4|z|+4$.
Rút gọn ta có $|z|^4-10|z|^3+9|z|^2+4|z|-4=0 \Leftrightarrow (|z|-1)\left(|z|^3-9|z|^2+4\right)=0.$ (2)
Phương trình (2) có ba nghiệm phân biệt không âm nên có ba số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn phương án **A.** □

§2. Biểu Diễn Hình Học Của Số Phức

1. Biểu diễn hình học cơ bản của số phức

7.34 (Đề tham khảo 2020). Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z=-1+2i$ là điểm nào dưới đây?

A. $N(1;-2)$. B. $M(-1;-2)$. C. $Q(1;2)$. D. $P(-1;2)$.

Lời giải.
Điểm biểu diễn số phức $z=a+bi$ là $M(a;b)$, do đó điểm biểu diễn số phức $z=-1+2i$ là $P(-1;2)$.
Chọn phương án **D.** □

7.35 (Đề chính thức 2020). Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $z=-3+4i$?

A. $P(-3;4)$. B. $N(3;4)$. C. $M(4;3)$. D. $Q(4;-3)$.

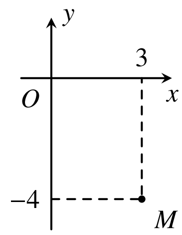
Lời giải.
Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $z=-3+4i$ là $P(-3;4)$.
Chọn phương án **A.** □

7.36 (Đề chính thức 2020). Trên mặt phẳng tọa độ, biết $M(-3;1)$ là điểm biểu diễn của số phức z. Phần thực của z bằng

A. 1. B. -1. C. 3. D. -3.

Lời giải.
Ta có $z=-3+i$, do đó phần thực của z là -3.
Chọn phương án **D.** □

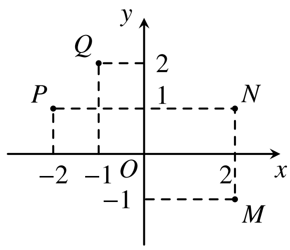
7.37 (Đề thử nghiệm 2017). Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.



A. Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$. **B**. Phần thực là 3 và phần ảo là -4.
C. Phần thực là -4và phần ảo là $3i$. **D**. Phần thực là -4 và phần ảo là 3.

Lời giải.
Điểm M trong hình vẽ có hoành độ $x = 3$ và tung độ $y = -4$.
Vậy số phức z có phần thực là 3 và phần ảo là -4.
Chọn phương án **B.** □

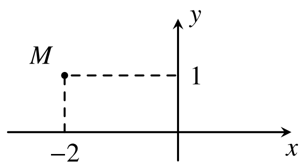
7.38 (Đề tham khảo 2019). Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức $z = -1 + 2i$?



A. Q. **B**. N. **C**. P. **D**. M.

Lời giải.
Điểm biểu diễn số phức $z = -1 + 2i$ có tọa độ $(-1; 2)$, suy ra Q là điểm biểu diễn của z.
Chọn phương án **A.** □

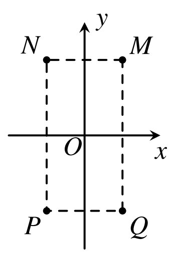
7.39 (Đề tham khảo 2018). Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức



A. $z = 2 + i$. **B**. $z = 1 - 2i$. **C**. $z = -2 + i$. **D**. $z = 1 + 2i$.

Lời giải.
Điểm $M(-2; 1)$ biểu diễn cho số phức $z = -2 + i$.
Chọn phương án **C.** □

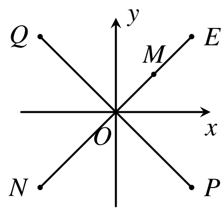
7.40 (Đề minh họa 2016). Cho số phức z thỏa mãn $(1 + i)z = 3 - i$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm M, N, P, Q ở hình bên?



A. Điểm Q. **B**. Điểm N. **C**. Điểm P. **D**. Điểm M.

Lời giải.
Ta có $(1 + i)z = 3 - i \Leftrightarrow z = \dfrac{3 - i}{1 + i} = 1 - 2i$, suy ra điểm biểu diễn của z là Q.
Chọn phương án **A.** □

7.41 (Đề tham khảo 2017). Trên mặt phẳng tọa độ, điểm M là điểm biểu diễn của số phức z (như hình vẽ bên). Điểm nào trong hình vẽ là điểm biểu diễn của số phức $2z$?



A. Điểm N. **B**. Điểm P. **C**. Điểm E. **D**. Điểm Q.

Lời giải.
Giả sử $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, ta có $M(a; b)$ và $2z = 2a + 2bi$.
Gọi M' là điểm biểu diễn $2z$ ta có $M'(2a; 2b)$, suy ra M trung điểm OM' hay $M' \equiv E$.
Chọn phương án **C.** □

7.42 (Đề chính thức 2020). Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 + 6z + 13 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức $1 - z_0$ là

A. $P(4;-2)$. **B.** $Q(2;-2)$. **C.** $M(4;2)$. **D.** $N(-2;2)$.

Lời giải.
Ta có $z^2+6z+13=0 \Leftrightarrow z=-3\pm 2i$.
Vì z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương nên $z_0=-3+2i$, suy ra $1-z_0=1-(-3+2i)=4-2i$.
Vậy điểm biểu diễn của số phức $1-z_0$ là $P(4;-2)$.
Chọn phương án **A.** □

7.43 (Đề tham khảo 2020). Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biễu diễn số phức $z=(1+2i)^2$ là điểm nào dưới đây?

A. $N(4;-3)$. **B.** $Q(5;4)$. **C.** $M(4;5)$. **D.** $P(-3;4)$.

Lời giải.
Ta có $z=(1+2i)^2=-3+4i$.
Vậy điểm biểu diễn số phức z là $P(-3;4)$.
Chọn phương án **D.** □

7.44 (Đề chính thức 2019). Cho hai số phức $z_1=1-i$ và $z_2=1+2i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức $3z_1+z_2$ có tọa độ là

A. $(4;1)$. **B.** $(-1;4)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $(4;-1)$.

Lời giải.
Ta có $3z_1+z_2=3(1-i)+(1+2i)=4-i$. Vậy, điểm biểu diễn số phức $3z_1+z_2$ có tọa độ là $(4;-1)$.
Chọn phương án **D.** □

7.45 (Đề chính thức 2017). Cho số phức $z=1-2i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w=iz$ trên mặt phẳng tọa độ?

A. $P(-2;1)$. **B.** $N(2;1)$. **C.** $Q(1;2)$. **D.** $M(1;-2)$.

Lời giải.
Ta có $w=i(1-2i)=2+i$ nên điểm biểu diễn của w là $N(2;1)$.
Chọn phương án **B.** □

2. Tập hợp điểm biểu diễn số phức

7.46 (Đề minh họa 2016). Cho các số phức z thỏa mãn $|z|=4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=(3+4i)z+i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=4$. **B.** $r=20$. **C.** $r=5$. **D.** $r=22$.

Lời giải.
Ta có $w=(3+4i)z+i \Leftrightarrow w-i=(3+4i)z$, suy ra $|w-i|=|3+4i|\cdot|z|=20$.
Chọn phương án **B.** □

7.47 (Đề chính thức 2018). Xét các điểm số phức z thỏa mãn $(\bar{z}+i)(z+2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\dfrac{5}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.
Gọi $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$, ta có

$$(\bar{z}+i)(z+2)=(x-yi+i)(x+yi+2)=(x^2+2x+y^2-y)+(x-2y+2)i.$$

Do đó $(\bar{z}+i)(z+2)$ là số thuần ảo khi và chỉ khi

$$x^2+2x+y^2-y=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}.$$

Vậy, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.
Chọn phương án **B.** □

7.48 (Đề tham khảo 2019). Xét các số phức z thỏa mãn $(z+2i)(\bar{z}+2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn, tâm của đường tròn đó có tọa độ là

A. $(-1;1)$. **B.** $(1;-1)$. **C.** $(-1;-1)$. **D.** $(1;1)$.

Lời giải.
Gọi $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$, ta có

$$(z + 2i)(\overline{z} + 2) = (x + yi + 2i)(x - yi + 2) = x(x + 2) + y(y + 2) + \left[(x + 2)(y + 2) - xy\right] i.$$

Do đó $(z + 2i)(\overline{z} + 2)$ là số thuần ảo khi $x(x + 2) + y(y + 2) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$.
Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-1; -1)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$.
Chọn phương án **C.** □

7.49 (Đề chính thức 2019). Xét số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w = \dfrac{4 + iz}{1 + z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. 34. **B.** 26. **C.** $\sqrt{34}$. **D.** $\sqrt{26}$.

Lời giải.
Gọi $w = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$, ta có

$$w = \frac{4 + iz}{1 + z} \Leftrightarrow (1 + z)w = 4 + iz \Leftrightarrow z(w - i) = 4 - w \Leftrightarrow z = \frac{4 - w}{w - i}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} |z| = \sqrt{2} &\Leftrightarrow \left|\frac{4 - w}{w - i}\right| = \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2}\,|x + yi - i| = |4 - x - yi| \\ &\Leftrightarrow 2\left[x^2 + (y - 1)^2\right] = (x - 4)^2 + y^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 8x - 4y - 14 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 34. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w = \dfrac{4 + iz}{1 + z}$ là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{34}$.
Chọn phương án **C.** □

§3. Phương Trình Bậc Hai Nghiệm Phức

1. Phương trình bậc hai

7.50 (Đề chính thức 2020). Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + z + 2 = 0$. Khi đó $|z_1| + |z_2|$ bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải.
Ta có $z^2 + z + 2 = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$.

Vậy $|z_1| + |z_2| = \left|\dfrac{-1 + i\sqrt{7}}{2}\right| + \left|\dfrac{-1 - i\sqrt{7}}{2}\right| = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

Chọn phương án **D.** □

7.51 (Đề tham khảo 2017). Ký hiệu z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + z + 1 = 0$. Tính $P = z_1^2 + z_2^2 + z_1 z_2$.

A. $P = -1$. **B.** $P = 1$. **C.** $P = 0$. **D.** $P = 2$.

Lời giải.

C1: Sử dụng máy tính giải phương trình được hai nghiệm lần lượt lưu vào ô nhớ A và B. Nhấn $A^2 + B^2 + AB$ được kết quả là 0.

C2: Theo định lý Vi-ét có $z_1 + z_2 = -1; z_1 z_2 = 1$. Khi đó $P = (z_1 + z_2)^2 - z_1 z_2 = (-1)^2 - 1 = 0$.

Chọn phương án **C.** □

7.52 (Đề tham khảo 2019). Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 3z + 5 = 0$. Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ bằng

A. 3. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** 10. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải.

C1: Ta có $z^2 - 3z + 5 = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{3}{2} \pm \dfrac{11}{2}i$, do đó $|z_1| + |z_2| = \left|\dfrac{3}{2} + \dfrac{11}{2}i\right| + \left|\dfrac{3}{2} - \dfrac{11}{2}i\right| = 2\sqrt{5}$.

C2: Sử dụng máy tính giải phương trình được hai nghiệm lần lượt lưu và A và B, sau đó tính $|A| + |B|$.

Chọn phương án **B.** □

7.53 (Đề chính thức 2019). Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 6z + 10 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng

A. 26. **B.** 16. **C.** 20. **D.** 56.

Lời giải.

C1: Ta có $z^2 - 6z + 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 3 + i \\ z = 3 - i \end{array}\right.$, do đó $z_1^2 + z_2^2 = (3 + i)^2 + (3 - i)^2 = 16$.

C2: Sử dụng máy tính giải phương trình được hai nghiệm lần lượt lưu vào A và B, sau đó tính $A^2 + B^2$.

Chọn phương án **B.** □

7.54 (Đề tham khảo 2020). Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Môđun của số phức $z_0 + i$ bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** 10. **D.** $\sqrt{10}$.

Lời giải.

Ta có $z^2 - 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow z = 1 \pm 2i$.
Vì z_0 là nghiệm có phần ảo âm nên $z_0 = 1 - 2i \Rightarrow z_0 + i = 1 - i$.
Vậy $|z_0 + i| = |1 - i| = \sqrt{2}$.
Chọn phương án **A.** □

7.55 (Đề tham khảo 2018). Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $4z^2 - 4z + 3 = 0$. Giá trị của biểu thức $|z_1| + |z_2|$ bằng

A. 3. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $4z^2 - 4z + 3 = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Do đó $|z_1| + |z_2| = \left|\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right| + \left|\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{3}$.

Chọn phương án **D.** □

7.56 (Đề thử nghiệm 2017). Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $4z^2 - 16z + 17 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w = iz_0$?

A. $M_4\left(\dfrac{1}{4}; 1\right)$. **B.** $M_1\left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$. **C.** $M_3\left(-\dfrac{1}{4}; 1\right)$. **D.** $M_2\left(-\dfrac{1}{2}; 2\right)$.

Lời giải.

Ta có $4z^2 - 16z + 17 = 0 \Leftrightarrow z = 2 \pm \dfrac{1}{2}i$, suy ra $z_0 = 2 + \dfrac{1}{2}i \Rightarrow w = i\left(2 + \dfrac{1}{2}i\right) = -\dfrac{1}{2} + 2i$.

Vậy điểm biểu diễn w là $M_2\left(-\dfrac{1}{2}; 2\right)$.

Chọn phương án **D.** □

7.57 (Đề chính thức 2017). Phương trình nào dưới đây nhận hai số phức $1 + \sqrt{2}i$ và $1 - \sqrt{2}i$ là nghiệm?

A. $z^2 + 2z + 3 = 0$. **B.** $z^2 - 2z - 3 = 0$. **C.** $z^2 - 2z + 3 = 0$. **D.** $z^2 + 2z - 3 = 0$.

Lời giải.

C1: Sử dụng máy tính giải cụ thể các phương trình chọn được phương án $z^2 - 2z + 3 = 0$.

C2: Sử dụng định lý Vi-ét tính $(1 + i\sqrt{2}) + (1 - i\sqrt{2}) = 2$ và $(1 + i\sqrt{2})(1 - i\sqrt{2}) = 3$ nên chọn phương án $z^2 - 2z + 3 = 0$.

Chọn phương án **C.** □

2. Phương trình đưa về phương trình bậc hai

7.58 (Đề minh họa 2016). Kí hiệu z_1, z_2, z_3 và z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 - z^2 - 12 = 0$. Tính tổng $T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$.

A. $T = 4 + 2\sqrt{3}$. B. $T = 2 + 2\sqrt{3}$. C. $T = 2\sqrt{3}$. D. $T = 4$.

Lời giải.

Ta có $z^4 - z^2 + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = 4 \\ z^2 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \pm 2 \\ z = \pm i\sqrt{3}. \end{array}\right.$

Vậy $T = |2| + |-2| + \left|i\sqrt{3}\right| + \left|-i\sqrt{3}\right| = 4 + 2\sqrt{3}$.

Chọn phương án **A.** □

§4. Cực Trị Số Phức

1. Phương pháp hình học

7.59 (Đề tham khảo 2017). Xét các số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $|z - 1 + i|$. Tính $P = m + M$.

A. $P = \dfrac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$. B. $P = \dfrac{5\sqrt{2} + \sqrt{73}}{2}$. C. $P = 5\sqrt{2} + \sqrt{73}$. D. $P = \sqrt{13} + \sqrt{73}$.

Lời giải.

Đặt $A(-2; 1), B(4; 7)$, ta có $AB = 6\sqrt{2}$. (1)

Gọi $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ và $N(x; y)$ là điểm biểu diễn z. Ta có

$$\begin{aligned} AN + BN &= \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-7)^2} \\ &= |z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2} \qquad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta có $AN + BN = AB$, suy ra N thuộc đoạn thẳng AB.

Đặt $C(1; -1)$, ta có $|z - 1 + i| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = CN$.

Do đó $|z - 1 + i|$ đạt giá trị nhỏ nhất và lớn nhất khi CN đạt giá trị nhỏ nhất và lớn nhất.

Đường thẳng AB có phương trình $x - y + 3 = 0$.

Đường thẳng d đi qua C và vuông góc AB có phương trình $x + y = 0$.

Suy ra d cắt AB tại $H\left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$.

Vì H thuộc đoạn thẳng AB nên CN nhỏ nhất khi $N \equiv H$; CN lớn nhất khi $N \equiv A$ hoặc $N \equiv B$.

Ta có $CA = \sqrt{13}, CB = \sqrt{73}, CH = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Do đó $m = CH = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}, M = CB = \sqrt{73}$. Vậy $P = m + M = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} + \sqrt{73} = \dfrac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$.

Chọn phương án **A.** □

2. Phương pháp đại số

7.60 (Đề tham khảo 2018). Xét các số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5}$. Tính $P = a + b$ khi $|z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P = 4$. B. $P = 10$. C. $P = 8$. D. $P = 6$.

Lời giải.

Ta có $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a-4)^2 + (b-3)^2 = 5 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 8a + 6b - 20$.

Đặt $T = |z + 1 - 3i| + |z - 1 + i| = \sqrt{(a+1)^2 + (b-3)^2} + \sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2}$.

Ta có $T^2 \leqslant 2\left((a+1)^2 + (b-3)^2 + (a-1)^2 + (b+1)^2\right) = 8(4a + 2b - 7)$. (1)

Lại có $4a + 2b - 7 = 4(a-4) + 2(b-3) + 15 \leqslant \sqrt{20\left[(a-4)^2 + (b-3)^2\right]} + 15 = 25$. (2)

Dấu bằng ở (1) và (2) đồng thời xảy ra khi $\begin{cases} 10a - 10 = 6a + 8b - 18 \\ \dfrac{a-4}{4} = \dfrac{b-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 4. \end{cases}$

Vậy $P = 10$.
Chọn phương án **B.** $\square$

Chuyên đề 8

Tổ Hợp, Xác Suất

§1. Tổ Hợp

1. Quy tắc đếm

8.1 (Đề tham khảo 2020). Từ một nhóm học sinh gồm 6 nam và 8 nữ, có bao nhiêu cách chọn ra một học sinh?

A. 6. **B**. 48. **C**. 14. **D**. 8.

Lời giải.

Chọn một học sinh nam có 6 cách.

Chọn một học sinh nữ có 8 cách.

Vậy, theo quy tắc cộng có $6 + 8 = 14$ cách chọn một học sinh.

Chọn phương án **C.** □

8.2 (Đề chính thức 2020). Có bao nhiêu cách chọn một học sinh từ một nhóm học sinh gồm 5 học sinh nam và 6 học sinh nữ?

A. 5. **B**. 11. **C**. 6. **D**. 30.

Lời giải.

Chọn một học sinh nam có 5 cách; chọn một học sinh nữ có 6 cách.

Vậy có $5 + 6 = 11$ cách chọn một học sinh.

Chọn phương án **B.** □

2. Hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp

8.3 (Đề tham khảo 2019). Với k và n là hai số nguyên dương tùy ý thỏa mãn $k \leqslant n$, mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{k!(n-k)!}{n!}$. **B**. $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. **C**. $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. **D**. $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!}$.

Lời giải.

Công thức tính số các tổ hợp là $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Chọn phương án **B.** □

8.4 (Đề tham khảo 2018). Cho tập hợp M có 10 phần tử. Số tập con gồm 2 phần tử của M là

A. C_{10}^2. **B**. A_{10}^2. **C**. A_{10}^8. **D**. 10^2.

Lời giải.

Theo định nghĩa tổ hợp số tập con gồm 2 phần tử của M là C_{10}^2.

Chọn phương án **A.** □

8.5 (Đề chính thức 2019). Số cách chọn 2 học sinh từ 7 học sinh là

A. A_7^2. **B**. 2^7. **C**. C_7^2. **D**. 7^2.

Lời giải.

Số cách chọn k học sinh từ n học sinh là C_n^k $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

Chọn phương án **C.** □

8.6 (Đề tham khảo 2020). Có bao nhiêu cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 10 học sinh?

A. C_{10}^2. **B.** 10^2. **C.** A_{10}^2. **D.** 2^{10}.

Lời giải.
Mỗi cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 10 học sinh là một tổ hợp chập 2 của 10 phần tử.
Vậy số cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 10 học sinh là C_{10}^2.
Chọn phương án **A.** □

8.7 (Đề chính thức 2018). Có bao nhiêu cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 34 học sinh?

A. 2^{34}. **B.** C_{34}^2. **C.** A_{34}^2. **D.** 34^2.

Lời giải.
Mỗi cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 34 học sinh là một tổ hợp chập 2 của 34 phần tử.
Vậy, số cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 34 học sinh là C_{34}^2.
Chọn phương án **B.** □

8.8 (Đề chính thức 2020). Có bao nhiêu cách xếp 6 học sinh thành một hàng dọc?

A. 6. **B.** 1. **C.** 36. **D.** 720.

Lời giải.
Số cách xếp 6 học sinh thành một hàng dọc là $6! = 720$.
Chọn phương án **D.** □

3. Nhị thức Newton

8.9 (Đề tham khảo 2018). Với n là số nghuyên dương thỏa mãn $C_n^1 + C_n^2 = 55$, số hạng không chứa x trong khai triển của biểu thức $\left(x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^n$ bằng

A. 322560. **B.** 80640. **C.** 13440. **D.** 3360.

Lời giải.
Với điều kiện $n \in \mathbb{Z}, n \geqslant 2$ ta có $C_n^1 + C_n^2 = 55 \Leftrightarrow n + \frac{n(n-1)}{2} = 55 \Leftrightarrow n^2 + n - 110 = 0 \Leftrightarrow n = 10$.
Khi đó $\left(x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^{10} = \sum\limits_{k=0}^{10} C_{10}^k \left(x^3\right)^{10-k} \left(\frac{1}{x^2}\right)^k = \sum\limits_{k=0}^{10} C_{10}^k 2^k x^{30-5k}$.
Số hạng không chứa x tương ứng với số hạng chứa k thỏa $30 - 5k = 0 \Leftrightarrow k = 6$.
Vậy số hạng không chứa x là $C_{10}^6 \cdot 2^6 = 13440$.
Chọn phương án **C.** □

8.10 (Đề chính thức 2018). Hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức $x(2x-1)^6 + (3x-1)^8$ bằng

A. -13368. **B.** 13368. **C.** 13848. **D.** -13848.

Lời giải.
Ta có khai triển

$$\begin{aligned} x(2x-1)^6 + (3x-1)^8 &= x\sum_{k=0}^{6} C_6^k \cdot (2x)^{6-k} \cdot (-1)^k + \sum_{i=0}^{8} C_8^i \cdot (3x)^{8-i} \cdot (-1)^i \\ &= \sum_{k=0}^{6} C_6^k \cdot 2^{6-k} \cdot (-1)^k \cdot x^{7-k} + \sum_{i=0}^{8} C_8^i \cdot 3^{8-i} \cdot (-1)^i \cdot x^{8-i}. \end{aligned}$$

Số hạng chứa x^5 tương ứng số hạng chứa k thỏa mãn $\begin{cases} 7-k=5 \\ 8-i=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2 \\ i=3. \end{cases}$
Vậy, hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức là $C_6^2 \cdot 2^4 \cdot (-1)^2 + C_8^3 \cdot 3^5 \cdot (-1)^3 = -13368$.
Chọn phương án **A.** □

§2. Xác Suất

1. Bài toán đếm tổ hợp

8.11 (Đề chính thức 2018). Từ một hộp chứa 11 quả cầu đỏ và 4 quả cầu màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh bằng

A. $\frac{4}{455}$. **B.** $\frac{33}{91}$. **C.** $\frac{24}{455}$. **D.** $\frac{4}{165}$.

Lời giải.
Số cách lấy ngẫu nhiên đồng thời ba quả cầu là $C_{15}^3 = 455$.
Số cách lấy được ba quả cầu màu xanh là $C_4^3 = 4$.
Vậy xác suất để lấy được ba quả cầu màu xanh là $\frac{4}{455}$.
Chọn phương án **A.** □

8.12 (Đề tham khảo 2018). Một hộp chứa 11 quả cầu gồm 5 quả cầu màu xanh và 6 quả cầu màu đỏ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 quả cầu từ hộp đó. Xác suất để 2 quả cầu chọn ra cùng màu bằng

A. $\frac{5}{11}$. **B.** $\frac{6}{11}$. **C.** $\frac{8}{11}$. **D.** $\frac{5}{22}$.

Lời giải.
Phép thử là chọn ngẫu nhiên 2 quả cầu trong 11 quả cầu nên ta có $n(\Omega) = C_{11}^2 = 55$.
Gọi A là biến cố "2 quả cầu chọn ra cùng màu", ta có $n(A) = C_5^2 + C_6^2 = 25$.
Vậy xác suất của A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{5}{11}$.
Chọn phương án **A.** □

2. Bài toán sắp xếp chỗ ngồi

8.13 (Đề tham khảo 2019). Có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có ba ghế. Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh, gồm 3 nam và 3 nữ, ngồi vào hai dãy ghế đó sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh ngồi. Xác suất để mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ bằng

A. $\frac{1}{10}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{1}{20}$. **D.** $\frac{2}{5}$.

Lời giải.
Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh ngồi vào 6 ghế nên số phần tử không gian mẫu là $6!$.
Học sinh nam thứ nhất ngồi vào 1 trong 6 ghế tùy ý nên có 6 cách xếp.
Học sinh nam thứ hai chừa ghế học sinh nam thứ nhất đã ngồi và ghế đối diện nên có 4 cách xếp.
Học sinh nam thứ ba chừa 2 ghế hai học sinh trước đã ngồi và 2 ghế đối diện nên có 2 cách xếp.
Ba học sinh nữ ngồi vào 3 ghế còn lại tùy ý nên có $3!$ cách xếp.
Do đó số phần tử của biến cố là $6 \times 4 \times 2 \times 3! = 288$.
Vậy xác suất cần tìm là $\frac{288}{6!} = \frac{288}{720} = \frac{2}{5}$.
Chọn phương án **D.** □

8.14 (Đề tham khảo 2020). Có 6 chiếc ghế được kê thành một hàng ngang. Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh, gồm 3 học sinh lớp A, 2 học sinh lớp B và 1 học sinh lớp C, ngồi vào hàng ghế đó, sao cho mỗi ghế có đúng 1 học sinh. Xác suất để học sinh lớp C chỉ ngồi cạnh học sinh lớp B bằng

A. $\frac{2}{15}$. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{3}{20}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải.
Xếp 6 học sinh ngồi tùy ý có $6! = 720$ cách.
Xếp học sinh ngồi vào ghế thỏa mãn yêu cầu bài toán gồm các trường hợp:

TH1: Học sinh lớp C ngồi ở hai ghế ngoài cùng có $2 \cdot 2 \cdot 4! = 96$ cách;

TH2: Học sinh lớp C ngồi ở bốn ghế ở giữa có $4 \cdot 2 \cdot 3! = 48$ cách.

Do đó số cách ngồi thỏa mãn yêu cầu bài toán là $96 + 48 = 144$.
Vậy xác suất cần tìm là $\frac{144}{720} = \frac{1}{5}$.
Chọn phương án **B.** □

8.15 (Đề tham khảo 2018). Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 5 học sinh lớp 12C thành một hàng ngang. Xác suất để trong 10 học sinh trên không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau bằng

A. $\dfrac{1}{42}$. **B.** $\dfrac{11}{630}$. **C.** $\dfrac{1}{105}$. **D.** $\dfrac{1}{126}$.

Lời giải.

Đánh số vị trí đứng từ 1 đến 10. Có hai khả năng xảy ra:

TH1: Các học sinh lớp 12C đứng cách nhau đúng một vị trí. Lúc này các học sinh lớp 12C đứng ở các vị trí số lẻ hoặc các vị trí số chẵn và có thể đổi vị trí cho nhau nên có $2 \times 5!$ cách; 5 học sinh còn lại đứng vào 5 vị trí còn lại có $5!$ cách. Suy ra trường hợp này có $2 \times 5! \times 5! = 28800$ cách.

TH2: Có 2 học sinh 12C đứng cách nhau hai vị trí. Lúc này hai học sinh đó chỉ có thể đứng ở các cặp vị trí $(1; 4), (3; 6), (5; 8), (7; 10)$ nên có 4 cách; các học sinh 12C đổi vị trí cho nhau có $5!$ cách; giữa hai học sinh 12C đứng cách nhau 2 vị trí phải xếp vào 1 học sinh 12A và 1 học sinh 12B nên có $\mathrm{C}_2^1 \times \mathrm{C}_3^1 \times 2!$ cách; 3 học sinh còn lại đứng vào 3 vị trí còn lại có $3!$ cách. Suy ra trường hợp này có $4 \times 5! \times \mathrm{C}_2^1 \times \mathrm{C}_3^1 \times 2! \times 3! = 34560$ cách.

Do đó số cách xếp để không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau là $28800 + 34560 = 63360$.

Vậy xác suất để không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau là $P = \dfrac{63360}{10!} = \dfrac{11}{630}$.

Chọn phương án **B**. □

3. Bài toán đếm về số

8.16 (Đề chính thức 2020). Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S, xác suất để số đó có hai chữ số tận cùng khác tính chẵn, lẻ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{50}{81}$. **C.** $\dfrac{5}{9}$. **D.** $\dfrac{5}{18}$.

Lời giải.

Số các số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau là $9 \times \mathrm{A}_9^5 = 136080$.

Suy ra S có 136080 phần tử, do đó chọn ngẫu nhiên một số từ S có 136080 cách.

Gọi số có hai chữ số tận cùng khác tính chẵn, lẻ là $\overline{abcdef}$.

Chọn a có 9 cách; chọn e, f có $\mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_5 1 \cdot 2! = 40$ cách; chọn b, c, d có $\mathrm{A}_7^3 = 210$ cách.

Do đó số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $9 \times 40 \times 210 = 75600$.

Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{75600}{136080} = \dfrac{5}{9}$.

Chọn phương án **C**. □

8.17 (Đề chính thức 2019). Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 25 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{13}{25}$. **C.** $\dfrac{313}{625}$. **D.** $\dfrac{12}{25}$.

Lời giải.

Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{25}^2 = 300$.

Gọi A là biến cố "chọn được hai số có tổng là một số chẵn". Hai số được chọn có tổng là một số chẵn khi và chỉ khi hai số đó cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Trong 25 số nguyên dương đầu tiên có 12 số chẵn và 13 số lẻ. Do đó số phần tử của biến cố A là $n(A) = \mathrm{C}_{12}^2 + \mathrm{C}_{13}^2 = 144$.

Vậy, xác suất cần tìm là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{144}{300} = \dfrac{12}{25}$.

Chọn phương án **D**. □

8.18 (Đề tham khảo 2020). Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là chẵn bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{16}{81}$. **C.** $\dfrac{4}{9}$. **D.** $\dfrac{41}{81}$.

Lời giải.

Số các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau là $9 \cdot \mathrm{A}_9^2 = 948$.

Số được chọn có tổng các chữ số là chẵn gồm các trường hợp:

TH1: Số được chọn có 3 chữ số đều chẵn có $4 \cdot \mathrm{A}_4^2 = 48$ số.

TH2: Số được chọn gồm chữ số 0 và hai chữ số lẻ có $2 \cdot \mathrm{A}_5^2 = 40$ số.

TH3: Số được chọn gồm chữ số chẵn khác 0 và hai chữ số lẻ có $4 \cdot \mathrm{C}_5^2 \cdot 3! = 240$ số.

Do đó số các số có tổng các chữ số là chẵn bằng $48 + 40 + 240 = 328$.
Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{328}{648} = \dfrac{41}{81}$.
Chọn phương án **D.** □

8.19 (Đề chính thức 2020). Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau và các chữ số thuộc tập hợp $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S, xác suất để số đó **không** có hai chữ số liên tiếp nào cùng chẵn bằng

A. $\dfrac{5}{21}$. **B.** $\dfrac{65}{126}$. **C.** $\dfrac{55}{126}$. **D.** $\dfrac{25}{42}$.

Lời giải.
Số phần tử của tập S là $\mathrm{A}_9^4 = 3024$.
Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S có 3024 cách.
Chọn được số **không** có hai chữ số liên tiếp nào cùng chẵn gồm các trường hợp:

TH1: Số gồm 4 chữ số lẻ có $\mathrm{A}_5^4 = 120$ số.

TH2: Số gồm 3 chữ số lẻ và 1 chữ số chẵn có $\mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{C}_4^1 \cdot 4! = 960$ số.

TH3: Số gồm 2 chữ số lẻ và 2 chữ số chẵn. Có 3 cách xếp 2 số chẵn không liên tiếp ở các vị trí $1 - 3$, $1 - 4$ và $2 - 4$. Chọn 2 số chẵn và xếp vào 2 vị trí có A_4^2 cách. Chọn 2 số lẻ và xếp vào 2 vị trí có A_5^2 cách. Do đó trường hợp này có $3 \cdot \mathrm{A}_4^2 \cdot \mathrm{A}_5^2 = 720$ số.

Do đó số cách chọn được số **không** có hai chữ số liên tiếp nào cùng chẵn là $120 + 960 + 720 = 1800$ cách.
Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{1800}{3024} = \dfrac{25}{42}$.
Chọn phương án **D.** □

8.20 (Đề chính thức 2018). Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 17]$. Xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 bằng

A. $\dfrac{1079}{4913}$. **B.** $\dfrac{1728}{4913}$. **C.** $\dfrac{1637}{4913}$. **D.** $\dfrac{23}{68}$.

Lời giải.
Mỗi bạn có 17 khả năng viết số nên số phần tử không gian mẫu là $17^3 = 4913$.
Ta chia các số tự nhiên từ 1 đến 17 thành 3 nhóm: Nhóm I gồm các số chia hết cho 3 có 5 số; nhóm II gồm các số chia cho 3 dư 1 gồm 6 số; nhóm III gồm các số chia cho 3 dư 2 có 6 số.
Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên có tổng chia hết cho 3 gồm các trường hợp sau:

TH1: Ba số đều chia hết cho 3 có $5^3 = 125$ cách.

TH2: Ba số đều chia cho 3 dư 1 có $6^3 = 216$ cách.

TH3: Ba số đều chia cho 3 dư 2 có $6^3 = 216$ cách.

TH4: Một số chia hết cho 3, một số chia cho 3 dư 1 và một số chia cho 3 dư 2 có $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3! = 1080$ cách.

Từ đó suy ra số cách viết thỏa mãn yêu cầu bài toán là $125 + 216 + 216 + 1080 = 1637$.
Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{1637}{4913}$.
Chọn phương án **C.** □

Chuyên đề 9

Dãy Số, Giới Hạn, Đạo Hàm

§1. Dãy Số, Cấp Số

1. Cấp số cộng

9.1 (Đề chính thức 2020). Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 11$ và công sai $d = 3$. Giá trị của u_2 bằng

A. 8. B. 14. C. 33. D. $\dfrac{11}{3}$.

Lời giải.
Ta có $u_2 = u_1 + d = 11 + 3 = 14$.
Chọn phương án **B.** □

9.2 (Đề tham khảo 2019). Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 5$. Giá trị của u_4 bằng

A. 22. B. 250. C. 12. D. 17.

Lời giải.
Từ công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$, ta có $u_4 = u_1 + 3d = 2 + 3 \cdot 5 = 17$.
Chọn phương án **D.** □

9.3 (Đề tham khảo 2020). Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3$ và $u_2 = 9$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

A. -6. B. 12. C. 6. D. 3.

Lời giải.
Từ công thức $u_{n+1} = u_n + d$, ta có

$$u_2 = u_1 + d \Leftrightarrow d = u_2 - u_1 = 9 - 3 = 6.$$

Chọn phương án **C.** □

9.4 (Đề chính thức 2019). Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3$ và $u_2 = 9$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

A. 6. B. -6. C. 12. D. 3.

Lời giải.
Công sai của cấp số cộng đã cho là $d = u_2 - u_1 = 9 - 3 = 6$.
Chọn phương án **A.** □

2. Cấp số nhân

9.5 (Đề chính thức 2020). Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$. Giá trị của u_2 bằng

A. 9. B. 6. C. 8. D. $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.
Ta có $u_2 = u_1 \cdot q = 3 \cdot 2 = 6$.
Chọn phương án **B.** □

9.6 (Đề tham khảo 2020). Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 6$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

A. 4. **B.** -4. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** 3.

Lời giải.
Áp dụng công thức $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$, ta có

$$u_2 = u_1 \cdot q \Leftrightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{6}{2} = 3.$$

Chọn phương án **D.** □

§2. Giới Hạn, Đạo Hàm

1. Giới hạn

9.7 (Đề chính thức 2018). $\lim \dfrac{1}{5n+3}$ bằng

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $\dfrac{1}{5}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.
Ta có $\lim \dfrac{1}{5n+3} = 0$.
Chọn phương án **A.** □

9.8 (Đề tham khảo 2018). $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-2}{x+3}$ bằng

A. $-\dfrac{2}{3}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -3.

Lời giải.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-2}{x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{3}{x}} = 1.$
Chọn phương án **C.** □

2. Liên tục

9.9 (Đề tham khảo 2019). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2\left(x^4-1\right) + m\left(x^2-1\right) - (x-1) \geqslant 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.
Đặt $f(x) = m^2\left(x^4-1\right) + m\left(x^2-1\right) - (x-1) = (x-1)\left[m^2\left(x^3+x^2+x+1\right) + m(x+1) - 6\right]$.
Lại đặt $g(x) = m^2\left(x^3+x^2+x+1\right) + m(x+1) - 6$, ta có $f(x) = (x-1)g(x)$.
Nếu $x = 1$ không phải nghiệm của $g(x)$ thì $f(x)$ đổi dấu khi qua $x = 1$ nên không thể xảy ra $f(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Nếu $x = 1$ là nghiệm của $g(x)$, ta có $g(1) = 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 2m - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$
Với $m = 1$, ta có $f(x) = (x-1)^2\left(x^2+2x+4\right) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn).
Với $m = -\dfrac{3}{2}$, ta có $f(x) = \dfrac{3}{4}(x-1)^2\left(3x^2+6x+7\right) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn).
Vậy tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng $1 + \left(-\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$.
Chọn phương án **C.** □

3. Phương trình tiếp tuyến

9.10 (Đề tham khảo 2018). Cho hàm số $y = \dfrac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a;1)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$. Gọi $M(x_0; y_0)$ ta có $y_0 = \dfrac{-x_0+2}{x_0-1}$; $y'(x_0) = -\dfrac{1}{(x_0-1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y = -\dfrac{1}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \dfrac{-x_0+2}{x_0-1}$.

Tiếp tuyến đi qua A nên ta có $1 = -\dfrac{1}{(x_0-1)^2}(a-x_0) + \dfrac{-x_0+2}{x_0-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq 1 \\ 2x_0^2 + 6x_0 + a + 3. \end{cases}$

Để có đúng một tiếp tuyến thì $f(x_0) = 2x_0^2 + 6x_0 + a + 3$ có đúng một nghiệm khác 1.

Điều này tương đương với $\left[\begin{array}{ll} f(x_0) \text{ có nghiệm kép } \neq 1 & (1) \\ f(x_0) \text{ có hai nghiệm phân biệt trong đó 1 nghiệm là 1.} & (2) \end{array}\right.$

Ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a+3=0 \\ a-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \dfrac{3}{2}$.

Và (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a+3>0 \\ a-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1$.

Suy ra $S = \left\{1; \dfrac{3}{2}\right\}$ nên tổng các phần tử của S là $1 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$.

Chọn phương án **B.** □

Chuyên đề 10

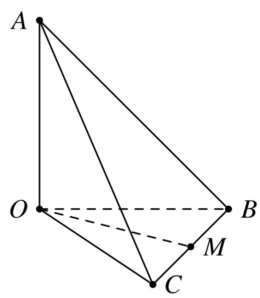
Góc Và Khoảng Cách

§1. Góc

1. Góc giữa hai đường thẳng

10.1 (Đề tham khảo 2018). Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

A. 60°. **B**. 90°. **C**. 45°. **D**. 30°.



Lời giải.

Gọi N là trung điểm AC ta có $MN \parallel AB$.

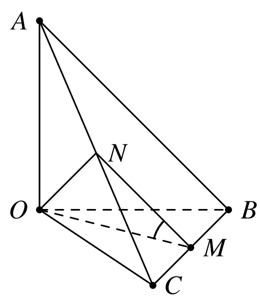
Do đó góc giữa OM và AB bằng góc giữa OM và MN.

Ta có $OA = OB = OC$ và OA, OB, OC đôi một vuông góc nên $AB = BC = CA$.

Lại có $OM = \dfrac{1}{2}BC$; $ON = \dfrac{1}{2}AC$; $MN = \dfrac{1}{2}AB$.

Suy ra $OM = ON = MN$ hay tam giác OMN đều, suy ra $\widehat{OMN} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa OM và AB bằng 60°.

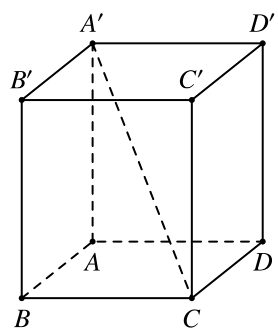


Chọn phương án **A.** □

2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

10.2 (Đề chính thức 2020). Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = BC = a$, $AA' = \sqrt{6}a$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. 90°. **B**. 45°. **C**. 30°. **D**. 60°.

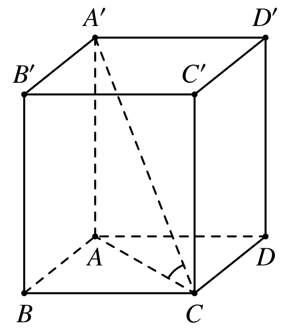


Lời giải.

Ta có AC là hình chiếu của $A'C$ trên $(ABCD)$, suy ra góc giữa $A'C$ và $(ABCD)$ là $\widehat{A'CA}$.

Tam giác $A'CA$ vuông tại A có $\tan\widehat{A'CA} = \dfrac{A'A}{AC} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$.

Vậy góc giữa $A'C$ và $(ABCD)$ bằng 60°.



Chọn phương án **D**. □

10.3 (Đề chính thức 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

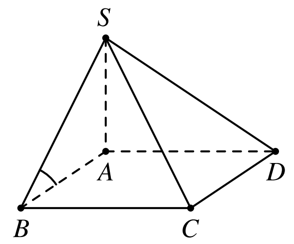
A. 30°. **B**. 45°. **C**. 60°. **D**. 90°.

Lời giải.

Ta có AB là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$.

Do đó góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng $\widehat{SBA}$.

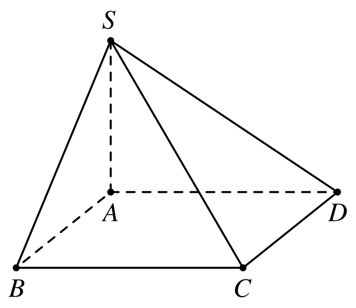
Trong tam giác SAB vuông tại A có $\cos\widehat{SBA} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.



Chọn phương án **C**. □

10.4 (Đề tham khảo 2020). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. 45°. **B**. 30°. **C**. 90°. **D**. 60°.



Lời giải.

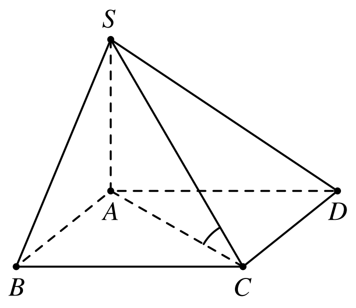
Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra AC là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$.

Do đó góc giữa SC và $(ABCD)$ là $\widehat{SCA}$.

Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$ nên $AC = a\sqrt{6}$.

Xét $\triangle SAC$ vuông tại A có

$$\tan\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^\circ.$$

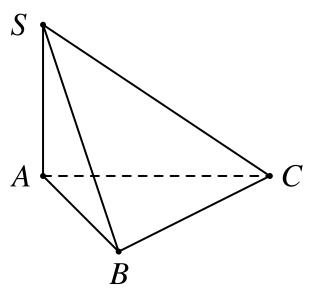


Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30°.

Chọn phương án **B**. □

10.5 (Đề chính thức 2019). Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại B, $AB = \sqrt{3}a$ và $BC = a$ (minh họa như hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

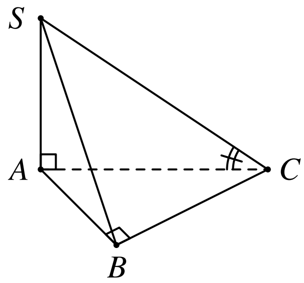
A. 30°. **B**. 60°. **C**. 90°. **D**. 45°.



Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow AC$ là hình chiếu của SC trên (ABC). Do đó góc giữa SC và (ABC) là $\widehat{SCA}$. Trong tam giác ABC vuông tại B có

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a.$$



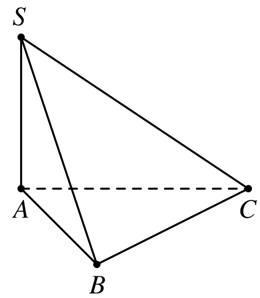
Trong tam giác SAC vuông tại A có

$$\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ.$$

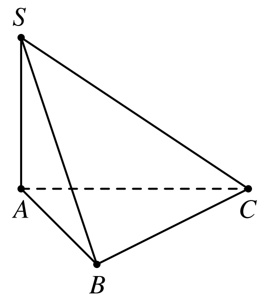
Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 45°.
Chọn phương án **D.** □

10.6 (Đề tham khảo 2020). Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = a\sqrt{2}$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = 2a$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 45°. **B.** 90°. **C.** 60°. **D.** 30°.



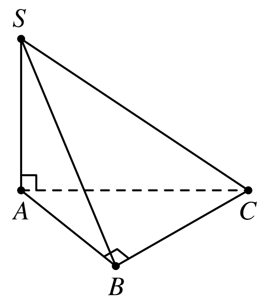
Lời giải.
Ta có $SA \perp (ABC)$, suy ra AB là hình chiếu của SB trên (ABC).
Do đó góc giữa SB và (ABC) là $\widehat{SBA}$.
Tam giác ABC vuông cân tại B, suy ra $AB = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$.
Khi đó tam giác SAB vuông cân tại A, suy ra $\widehat{SBA} = 45^\circ$.
Vậy góc giữa SB và (ABC) bằng 45°.



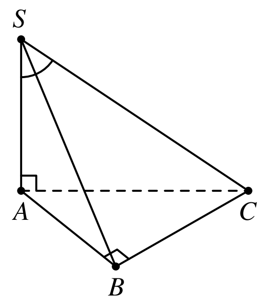
Chọn phương án **A.** □

10.7 (Đề chính thức 2020). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $BC = 2a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a\sqrt{15}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

A. 90°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 45°.



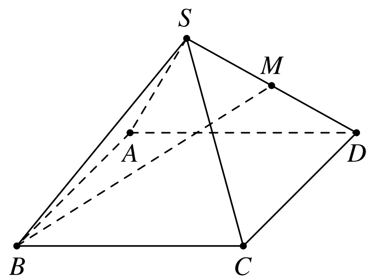
Lời giải.
Ta có $SA \perp (ABC)$, suy ra AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng (ABC).
Do đó góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{SCA}$.
Tam giác ABC vuông tại B có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{5}$.
Tam giác SAC vuông tại C có $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^\circ$.
Vậy góc giữa SC và mặt phẳng đáy bằng 60°.



Chọn phương án **B.** □

10.8 (Đề tham khảo 2018). Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của SD (tham khảo hình vẽ bên). Tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



Lời giải.

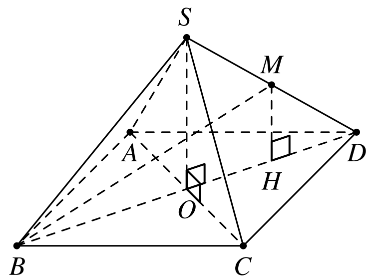
Gọi $O = AC \cap BD$ và H trung điểm OD.

Ta có $SO \perp (ABCD)$ và $MH \parallel SO$ nên $MH \perp (ABCD)$.

Suy ra góc giữa BM và $(ABCD)$ là $\widehat{MBH}$.

Ta có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MH = \frac{1}{2}SO = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Lại có $BH = \frac{3}{4}BD = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$, suy ra $\tan\widehat{MBH} = \frac{MH}{BH} = \frac{1}{3}$.



Chọn phương án **B.** □

3. Góc giữa hai mặt phẳng

10.9 (Đề tham khảo 2019). Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ABC'D')$ bằng

A. 90°. **B.** 30°. **C.** 45°. **D.** 60°.

Lời giải.

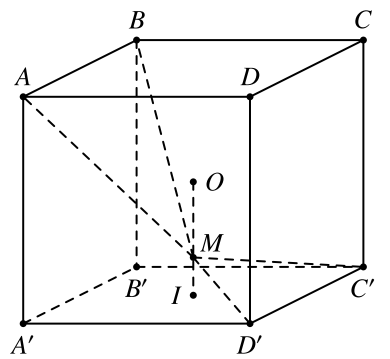
Ta có $CD \perp (BCC'B') \Rightarrow CD \perp BC'$, $\begin{cases} BC' \perp CD \\ BC' \perp B'C \end{cases} \Rightarrow BC' \perp (A'B'CD) \Rightarrow (ABC'D') \perp (A'B'CD)$.

Vậy góc giữa $(A'B'CD)$ và $(ABC'D')$ là 90°.

Chọn phương án **A.** □

10.10 (Đề chính thức 2018). Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO = 2MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng

A. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$. **B.** $\frac{6\sqrt{13}}{65}$. **C.** $\frac{6\sqrt{85}}{85}$. **D.** $\frac{7\sqrt{85}}{85}$.



Lời giải.

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của $D'C'$ và AB.

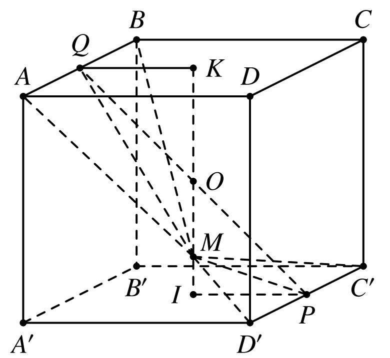
Ta có $\begin{cases} MP \perp C'D' \parallel AB \\ MQ \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (MPQ)$.

Từ đó suy ra $(MAB) \perp (MPQ)$ và $(MC'D') \perp (MPQ)$.

Do đó góc giữa (MAB) và $(MC'D')$ bằng góc giữa MQ và MP.

Đặt $AB = a$, ta có $OI = \frac{a}{2} \Rightarrow MI = \frac{1}{3}OI = \frac{a}{6}$.

Gọi K là tâm của $ABCD$, ta có $MK = IK - MI = \frac{5a}{6}$.



Suy ra $MP = \sqrt{MI^2 + IP^2} = \frac{\sqrt{10}a}{6}$, $MQ = \sqrt{MK^2 + KQ^2} = \frac{\sqrt{34}a}{6}$, $PQ = \sqrt{2}a$.

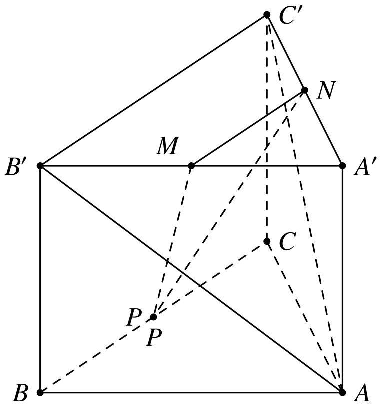
Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB), ta có

$$\cos\alpha = |\cos\widehat{PMQ}| = \frac{\left|MP^2 + MQ^2 - PQ^2\right|}{2MP\cdot MQ} = \frac{7\sqrt{85}}{85}.$$

Chọn phương án **D.** □

10.11 (Đề tham khảo 2018). Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B', A'C'$ và BC (tham khảo hình vẽ bên). Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng

A. $\dfrac{17\sqrt{13}}{65}$. **B.** $\dfrac{18\sqrt{13}}{65}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{13}}{65}$. **D.** $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$.



Lời giải.

Gọi K trung điểm $B'C'$ và I là giao điểm của $A'K$ và MN.

Dễ thấy $(AA'KP)$ vuông góc với $(AB'C')$ và (PMN).

Do đó góc giữa $(AB'C')$ và (PMN) và góc giữa AK và PI.

Ta có $AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = 3$; $AK = \sqrt{AP^2 + PK^2} = \sqrt{13}$; $PI = \sqrt{PK^2 + KI^2} = \dfrac{5}{2}$.

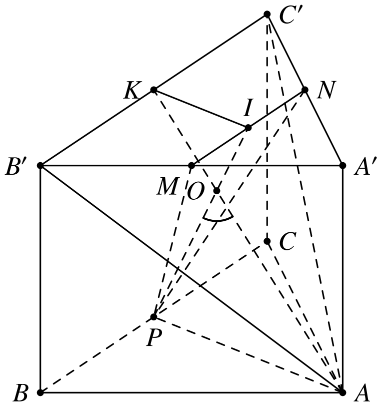
Gọi $O = AK \cap PI$ ta có $\triangle OAP \sim \triangle OKI$.

Do đó $\dfrac{OA}{OK} = \dfrac{OP}{OI} = \dfrac{AP}{KI} = 2$.

Từ đó suy ra $OA = \dfrac{2}{3}AK = \dfrac{2\sqrt{13}}{3}$; $OP = \dfrac{2}{3}PI = \dfrac{5}{3}$.

Trong $\triangle OAP$ có $\cos\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}\right) = \dfrac{OA^2 + OP^2 - AP^2}{2OA.OP} = \dfrac{\sqrt{13}}{65}$.

Vậy côsin của góc tạo bởi $(AB'C')$ và (MNP) bằng $\dfrac{\sqrt{13}}{65}$.



Chọn phương án **C.** □

§2. Khoảng Cách

1. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

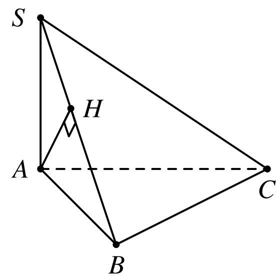
10.12 (Đề chính thức 2018). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{2}a}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{3}$.

Lời giải.

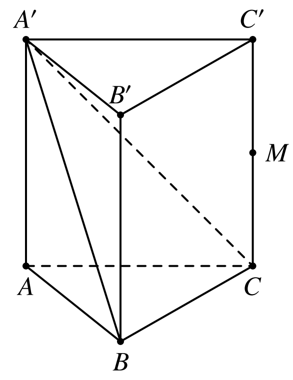
Gọi H là hình chiếu của A trên SB, ta có $AH \perp (SBC)$.

Do đó $\mathrm{d}(A, (SBC)) = AH = \dfrac{SA\cdot AB}{SB} = \dfrac{2a\cdot a}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$.



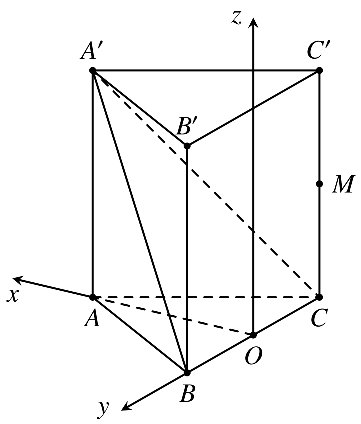
Chọn phương án **C.** □

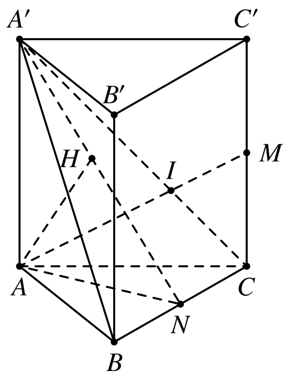
10.13 (Đề chính thức 2020). Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của CC' (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $A'BC$ bằng



A. $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{14}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$.

Lời giải.





C1: Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$.
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ và đặt $a = 1$, ta có

$$M\left(0; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right),\ A'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 1\right),\ B\left(0; \frac{1}{2}; 0\right),\ C\left(0; -\frac{1}{2}; 0\right).$$

Khi đó $\overrightarrow{BA'} = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1}{2}; -1\right)$, $\overrightarrow{BC} = (0; -1; 0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BC}\right] = \left(-1; 0; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Từ đó suy ra $(A'BC)$ có phương trình $-x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}z = 0$.

Vậy $\mathrm{d}(M, (A'BC)) = \dfrac{\left|\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right|}{\sqrt{1 + \dfrac{3}{4}}} = \dfrac{\sqrt{21}}{14}$.

C2: Gọi I là giao điểm của AM và $A'C$, ta có

$$\frac{MI}{AI} = \frac{MC}{A'A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{d}(M, (A'BC)) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(A, (A'BC)).$$

Gọi N trung điểm BC, ta có $\begin{cases} BC \perp AN \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'AN)$.

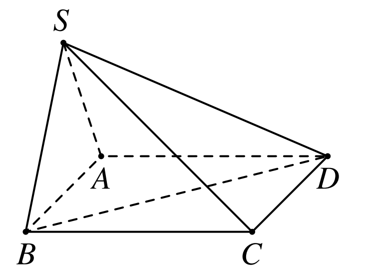
Gọi H là hình chiếu của A trên $A'N$, ta có $\begin{cases} AH \perp A'N \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (A'BC)$.

Tam giác $A'AN$ vuông tại A có $AH = \dfrac{AA' \cdot AN}{A'N} = \dfrac{a \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2 + \dfrac{3a^2}{4}}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Vậy $\mathrm{d}(M,(A'BC)) = \dfrac{1}{2}AH = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$.

Chọn phương án **B**. □

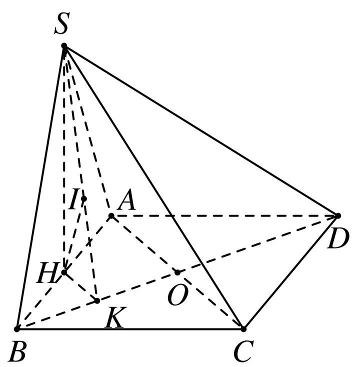
10.14 (Đề chính thức 2019). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ bên). Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng

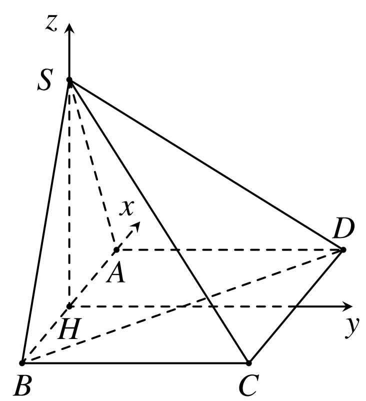


A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{28}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AB, ta có $SH \perp (ABCD)$ và $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.





C1: Gọi O là giao điểm của AC và BD, K là trung điểm BO, ta có $HK \parallel AO \Rightarrow HK \perp BD$. Hơn nữa $SH \perp BD$, suy ra $BD \perp (SHK)$. Gọi I là hình chiếu của H trên SK có $HI \perp SK$ và $HI \perp BD$, suy ra $HI \perp (SBD)$, hay $\mathrm{d}[H,(SBD)] = HI$. Xét tam giác SHK vuông tại H có $HK = \dfrac{1}{4}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow SK = \sqrt{SH^2 + HK^2} = \dfrac{a\sqrt{14}}{4}$. Từ đó suy ra $HI = \dfrac{SH \cdot HK}{SK} = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$.

Vì H trung điểm AB nên $\mathrm{d}[A,(SBD)] = 2\mathrm{d}[H,(SBD)] = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

C2: Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, có $O \equiv H$ và các trục Ox, Oy, Oz như hình vẽ trên. Chọn $a = 1$, ta có $A\left(\dfrac{1}{2};0;0\right)$, $S\left(0;0;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(-\dfrac{1}{2};0;0\right)$ và $D\left(\dfrac{1}{2};1;0\right)$. Khi đó $\overrightarrow{BS} = \left(\dfrac{1}{2};0;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{BD} = (1;1;0)$, suy ra $\left[\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BD}\right] = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{1}{2}\right)$. Do đó (SBD) có phương trình

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x - \sqrt{3}y - z + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Vậy, $\mathrm{d}[A,(SBD)] = \dfrac{\left|\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|}{\sqrt{3+3+1}} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$, hay $\mathrm{d}[A,(SBD)] = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Chọn phương án **C**. □

10.15 (Đề tham khảo 2019). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{15}a}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{15}a}{7}$.

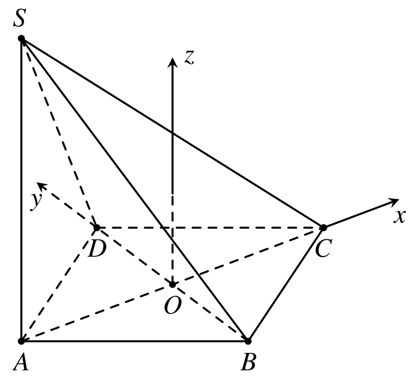
Lời giải.

Gọi O là tâm đáy và chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Ta có $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên $\triangle ABD$ đều, suy ra $BD = a, AC = a\sqrt{3}$.

Chọn $a = 2$, ta có

$$B(0, -1; 0),\ S(-\sqrt{3}; 0; 2),\ C(\sqrt{3}; 0; 0),\ D(0; 1; 0).$$



Khi đó $\overrightarrow{SC} = (2\sqrt{3}; 0; -2)$, $\overrightarrow{SD} = (\sqrt{3}; 1; -2)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}\right] = \left(2; 2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right)$.

Do đó (SCD) có phương trình

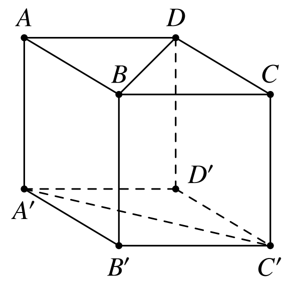
$$2x + 2\sqrt{3}(y-1) + 2\sqrt{3}z = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{3}y + \sqrt{3}z - \sqrt{3} = 0$$

Vậy $\mathrm{d}(B, (SCD)) = \dfrac{\left|-\sqrt{3} - \sqrt{3}\right|}{\sqrt{1+3+3}} = \dfrac{2\sqrt{21}}{7}$.

Chọn phương án **A**. □

2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

10.16 (Đề tham khảo 2018). Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng



A. $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. **B.** $\sqrt{2}a$. **C.** $\sqrt{3}a$. **D.** a.

Lời giải.

Ta có $A'C' \parallel (ABCD)$ nên $\mathrm{d}(A'C', BD) = \mathrm{d}[A'C', (ABCD)] = \mathrm{d}[A', (ABCD)] = A'A = a$.

Chọn phương án **D**. □

10.17 (Đề chính thức 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

A. $\dfrac{2a}{3}$. **B.** $\dfrac{a}{3}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}a}{2}$.

Lời giải.

Gọi E là điểm đối xứng với D qua A.

Ta có $AC \parallel BE \Rightarrow AC \parallel (SBE)$.

Do đó $\mathrm{d}(AC, SB) = \mathrm{d}(AC, (SBE)) = \mathrm{d}(A, (SBE))$.

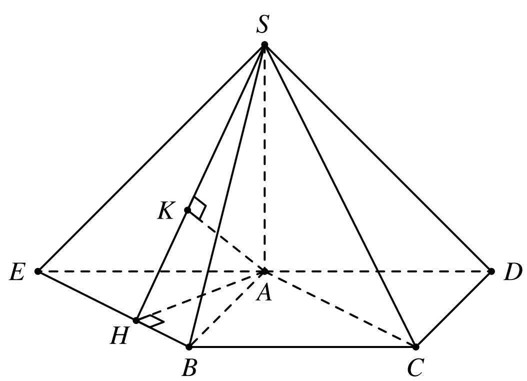
Gọi H là hình chiếu của A trên BE, ta có $BE \perp (SAH)$.

Gọi K là hình chiếu của A trên SH, ta có $AK \perp (SBE)$.

Trong $\triangle ABE$ có $AH = \dfrac{AB \cdot AE}{\sqrt{AB^2 + AE^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

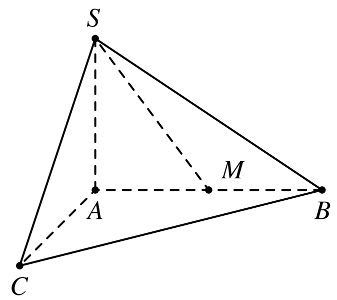
Suy ra $AK = \dfrac{SA \cdot AH}{\sqrt{SA^2 + AH^2}} = \dfrac{2a}{3}$.

Vậy $\mathrm{d}(AC, SB) = AK = \dfrac{2a}{3}$.



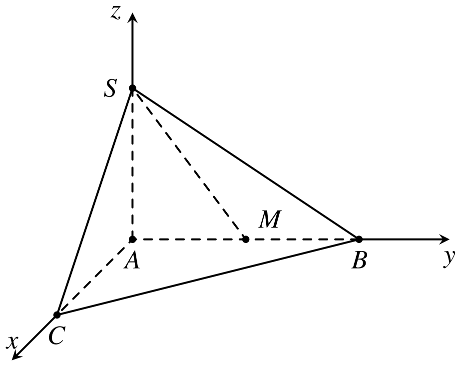
Chọn phương án **A**. □

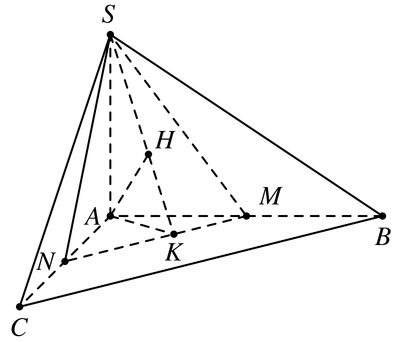
10.18 (Đề tham khảo 2020). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = 2a$, $AC = 4a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$ (minh họa như hình vẽ). Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC bằng



A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{2a}{3}$.

Lời giải.





C1: Gắn hệ tọa độ như hình vẽ và đặt $a = 1$, ta có

$$S(0; 0; 1),\ M(0; 1; 0),\ B(0; 2; 0),\ C(4; 0; 0).$$

Khi đó

$$\overrightarrow{SM} = (0; 1; -1),\ \overrightarrow{BC} = (4; -2; 0),\ \left[\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{BC}\right] = (-2; -4; -4),\ \overrightarrow{SB} = (0; 2; -1).$$

Do đó

$$\mathrm{d}(SM, BC) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{BC}\right] \cdot \overrightarrow{SB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{BC}\right]\right|} = \frac{|0 - 8 + 4|}{\sqrt{4 + 16 + 16}} = \frac{2}{3}.$$

Vậy $\mathrm{d}(SM, BC) = \dfrac{2a}{3}$.

C2: Gọi N trung điểm AC, ta có $MN \parallel BC$, suy ra $\mathrm{d}(SM, BC) = \mathrm{d}(BC, (SMN))$.
Vì M là trung điểm BC nên suy ra

$$\mathrm{d}(BC, (SMN)) = \mathrm{d}(B, (SMN)) = \mathrm{d}(A, (SMN)).$$

Gọi K là hình chiếu của A trên MN, ta có $AK \perp MN$ và $SA \perp MN$ nên $MN \perp (SAK)$.
Gọi H là hình chiếu của A trên SK, ta có $AH \perp SK$ và $AH \perp MN$, suy ra $AH \perp (SMN)$, hay $\mathrm{d}(A, (SMN))$.
Trong $\triangle AMN$ vuông tại A có

$$AK = \frac{AM \cdot AN}{MN} = \frac{a \cdot 2a}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

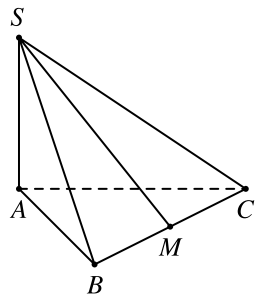
Trong $\triangle SAK$ vuông tại A có

$$AH = \frac{AS \cdot AK}{SK} = \frac{a \cdot \dfrac{2a}{\sqrt{5}}}{\sqrt{a^2 + \dfrac{4a^2}{5}}} = \frac{2a}{3}.$$

Vậy $\mathrm{d}(SM, BC) = AH = \dfrac{2a}{3}$.

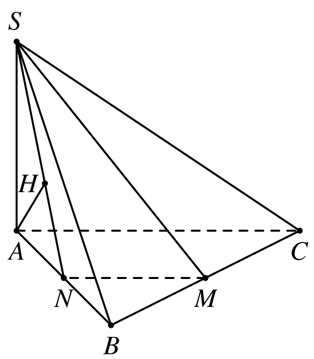
Chọn phương án **D.** □

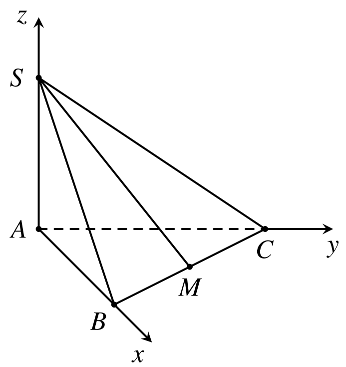
10.19 (Đề chính thức 2020). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{3}a$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SM bằng



A. $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{39}a}{13}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải.





C1: Gọi N trung điểm AB, ta có $AC \parallel MN \Rightarrow AC \parallel (SMN)$.
Do đó $\mathrm{d}(AC, SM) = \mathrm{d}(AC, (SMN)) = \mathrm{d}(A, (SMN))$.
Lại có $\begin{cases} AC \perp AB \\ AC \perp SA \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SAB)$, mà $MN \parallel AC$ nên $MN \perp (SAB)$.
Gọi H là hình chiếu của A trên SN, ta có $\begin{cases} AH \perp SN \\ AH \perp MN \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SMN)$.
Tam giác SAN vuông tại A có $AH = \dfrac{AS \cdot AN}{\sqrt{AS^2 + AN^2}} = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.
Vậy $\mathrm{d}(AC, SM) = AH = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.

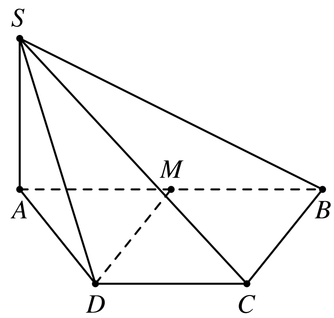
C2: Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ và đặt $a = 1$, ta có

$$A(0;0;0),\ C(0;1;0),\ S\left(0;0;\sqrt{3}\right),\ M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right).$$

Suy ra $\overrightarrow{AC} = (0;1;0), \overrightarrow{SM} = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\sqrt{3}\right), \overrightarrow{AS} = \left(0;0;\sqrt{3}\right)$, suy ra $\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SM}\right] = \left(-\sqrt{3};0;-\frac{1}{2}\right)$.
Vậy $\mathrm{d}(AC, SM) = \dfrac{\left|-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|}{\sqrt{3 + \dfrac{1}{4}}} = \dfrac{\sqrt{39}}{13}$.

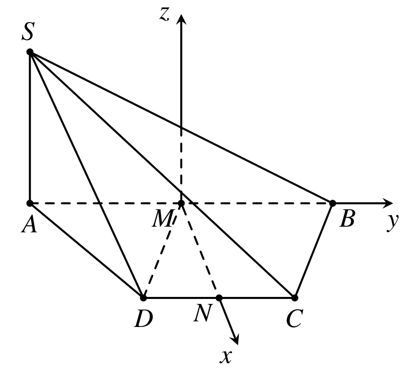
Chọn phương án **C.** □

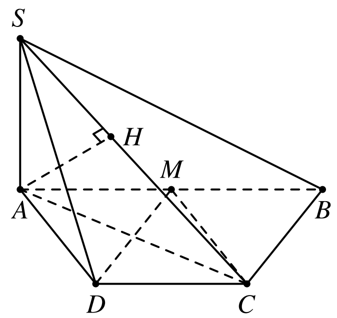
10.20 (Đề tham khảo 2020). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AB = 2a$, $AD = DC = CB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 3a$ (minh họa như hình bên). Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và DM bằng



A. $\dfrac{3\sqrt{13}a}{13}$. **B.** $\dfrac{3a}{4}$. **C.** $\dfrac{3a}{2}$. **D.** $\dfrac{6\sqrt{13}a}{13}$.

Lời giải.





C1: Từ giả thiết, suy ra $ABCD$ là hình thang cân.

Gọi N là trung điểm CD, ta có $MN \perp AB$ và $MN = \sqrt{AD^2 - \frac{1}{4}(AB - CD)^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gắn hệ tọa độ như hình vẽ và đặt $a = 1$, ta có

$$S(0; -1; 3),\ B(0; 1; 0),\ D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right),\ M(0; 0; 0).$$

Suy ra $\overrightarrow{SB} = (0; 2; -3)$, $\overrightarrow{DM} = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1}{2}; 0\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{DM}\right] = \left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{3\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3}\right)$.

Lại có $\overrightarrow{BM} = (0; -1; 0)$, do đó

$$\mathrm{d}(SB, DM) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{DM}\right] \cdot \overrightarrow{BM}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{DM}\right]\right|} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{27}{4} + 3}} = \frac{3}{4}.$$

C2: Ta có $AB = 2CD \Rightarrow BM = CD = BC$, do đó $MBCD$ là hình thoi.
Từ đó suy ra $DM \parallel BC \Rightarrow DM \parallel (SBC)$, do đó

$$\mathrm{d}(DM, SB) = \mathrm{d}(DM, (SBC)) = \mathrm{d}(M, (SBC)) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(A, (SBC)).$$

Tương tự, ta có $AMCD$ là hình thoi, suy ra $DM \perp AC$ và $AC = a\sqrt{3}$.
Hơn nữa $DM \perp SA$ nên $DM \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp (SAC)$.
Gọi H là hình chiếu của A trên SC, ta có $AH \perp SC$ và $AH \perp BC$ nên $AH \perp (SBC)$.
Trong $\triangle SAC$ vuông tại A có $AH = \dfrac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \dfrac{3a \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{9a^2 + 3a^2}} = \dfrac{3a}{2}$.
Vậy $\mathrm{d}(DM, SB) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(A, (SBC)) = \dfrac{1}{2}AH = \dfrac{3a}{4}$.

Chọn phương án **B.** □

BẢNG ĐÁP ÁN

1.1. B	1.2. D	1.3. A	1.4. A	1.5. D	1.6. C	1.7. C	1.8. C	1.9. B	1.10. A
1.11. C	1.12. C	1.13. B	1.14. B	1.15. A	1.16. D	1.17. C	1.18. B	1.19. B	1.20. A
1.21. B	1.22. D	1.23. D	1.24. D	1.25. A	1.26. C	1.27. B	1.28. C	1.29. D	1.30. A
1.31. A	1.32. B	1.33. B	1.34. B	1.35. C	1.36. C	1.37. A	1.38. D	1.39. A	1.40. D
1.41. A	1.42. B	1.43. C	1.44. D	1.45. A	1.46. B	1.47. D	1.48. C	1.49. D	1.50. B
1.51. D	1.52. A	1.53. C	1.54. B	1.55. D	1.56. A	1.57. C	1.58. B	1.59. D	1.60. C
1.61. D	1.62. C	1.63. C	1.64. C	1.65. A	1.66. D	1.67. A	1.68. B	1.69. B	1.70. C
1.71. A	1.72. B	1.73. D	1.74. C	1.75. C	1.76. C	1.77. A	1.78. A	1.79. D	1.80. B
1.81. C	1.82. B	1.83. D	1.84. A	1.85. B	1.86. D	1.87. A	1.88. C	1.89. C	1.90. B
1.91. D	1.92. B	1.93. B	1.94. C	1.95. D	1.96. D	1.97. A	1.98. B	1.99. A	1.100. D
1.101. D	1.102. A	1.103. B	1.104. B	1.105. B	1.106. C	1.107. B	1.108. C	1.109. C	1.110. C
1.111. C	1.112. B	1.113. A	1.114. D	1.115. A	1.116. A	1.117. D	1.118. A	1.119. D	1.120. A
1.121. A	1.122. B	1.123. D	1.124. A	1.125. A	1.126. D	1.127. B	1.128. C	1.129. B	1.130. C
1.131. C	1.132. D	1.133. D	1.134. C	1.135. A	1.136. C	2.1. B	2.2. A	2.3. C	2.4. C
2.5. A	2.6. D	2.7. D	2.8. B	2.9. B	2.10. C	2.11. C	2.12. B	2.13. A	2.14. D
2.15. C	2.16. A	2.17. A	2.18. B	2.19. A	2.20. C	2.21. B	2.22. A	2.23. D	2.24. D
2.25. C	2.26. C	2.27. D	2.28. B	2.29. C	2.30. D	2.31. B	2.32. C	2.33. A	2.34. A
2.35. B	2.36. C	2.37. D	2.38. D	2.39. B	3.1. B	3.2. A	3.3. C	3.4. D	3.5. B
3.6. C	3.7. A	3.8. C	3.9. B	3.10. B	3.11. B	3.12. B	3.13. B	3.14. A	3.15. D
3.16. D	3.17. D	3.18. A	3.19. D	3.20. C	3.21. C	3.22. C	3.23. A	3.24. A	3.25. D
3.26. B	3.27. A	3.28. D	3.29. A	3.30. B	3.31. A	3.32. C	3.33. A	3.34. C	3.35. C
3.36. B	3.37. D	3.38. B	3.39. B	3.40. D	3.41. C	3.42. D	3.43. D	3.44. A	3.45. B
3.46. C	3.47. D	3.48. B	3.49. B	3.50. A	3.51. A	3.52. A	3.53. C	3.54. D	3.55. C
3.56. C	3.57. B	3.58. A	3.59. B	3.60. D	3.61. D	3.62. A	3.63. D	3.64. C	3.65. D
3.66. C	3.67. C	3.68. D	3.69. B	3.70. D	3.71. C	3.72. C	3.73. B	3.74. C	3.75. A
3.76. D	3.77. B	3.78. A	3.79. A	3.80. D	3.81. C	3.82. D	3.83. B	3.84. B	3.85. A
3.86. B	3.87. B	3.88. C	3.89. A	3.90. B	3.91. D	3.92. A	3.93. A	3.94. B	3.95. D
3.96. A	3.97. C	3.98. B	3.99. C	3.100. C	3.101. D	3.102. A	3.103. A	4.1. C	4.2. A
4.3. D	4.4. B	4.5. A	4.6. A	4.7. B	4.8. B	4.9. C	4.10. A	4.11. D	4.12. D
4.13. B	4.14. C	4.15. D	4.16. A	4.17. A	4.18. C	4.19. C	4.20. B	4.21. D	4.22. D
4.23. A	4.24. B	4.25. C	4.26. A	4.27. B	4.28. B	4.29. C	4.30. D	4.31. D	4.32. D
4.33. A	4.34. A	4.35. B	4.36. C	4.37. C	4.38. D	4.39. B	4.40. D	4.41. C	4.42. B
4.43. A	5.1. C	5.2. B	5.3. B	5.4. A	5.5. A	5.6. C	5.7. A	5.8. D	5.9. D
5.10. B	5.11. C	5.12. A	5.13. C	5.14. D	5.15. A	5.16. B	5.17. D	5.18. D	5.19. C
5.20. D	5.21. B	5.22. B	5.23. A	5.24. A	5.25. A	5.26. C	5.27. B	5.28. C	5.29. B
5.30. C	5.31. A	5.32. B	5.33. A	5.34. D	5.35. C	5.36. A	5.37. D	5.38. B	5.39. A
5.40. D	5.41. B	5.42. D	5.43. A	5.44. B	5.45. C	5.46. D	5.47. A	5.48. C	5.49. D
5.50. B	5.51. D	5.52. B	5.53. C	5.54. D	5.55. D	5.56. B	5.57. A	5.58. B	5.59. C
5.60. B	5.61. C	5.62. A	5.63. D	5.64. A	5.65. C	5.66. A	5.67. D	5.68. A	5.69. D
5.70. B	5.71. C	5.72. C	5.73. B	5.74. D	5.75. C	5.76. D	5.77. A	5.78. B	6.1. D
6.2. B	6.3. B	6.4. B	6.5. C	6.6. A	6.7. C	6.8. C	6.9. B	6.10. D	6.11. C
6.12. D	6.13. D	6.14. D	6.15. A	6.16. A	6.17. A	6.18. B	6.19. C	6.20. A	6.21. C
6.22. B	6.23. B	6.24. D	6.25. B	6.26. B	6.27. A	6.28. D	6.29. C	6.30. A	6.31. C
6.32. B	6.33. D	6.34. D	6.35. D	6.36. A	6.37. A	6.38. C	6.39. D	6.40. C	6.41. C
6.42. A	6.43. A	6.44. C	6.45. D	6.46. A	6.47. B	6.48. C	6.49. A	6.50. A	6.51. D
6.52. B	6.53. D	6.54. D	6.55. B	6.56. D	6.57. B	6.58. A	6.59. B	6.60. D	6.61. C
6.62. C	6.63. D	6.64. B	6.65. C	6.66. C	6.67. B	6.68. B	6.69. A	6.70. A	6.71. C
6.72. C	6.73. C	6.74. B	6.75. D	6.76. C	6.77. B	6.78. D	6.79. B	6.80. D	6.81. B
6.82. D	6.83. C	6.84. A	6.85. D	6.86. A	6.87. A	6.88. A	6.89. B	6.90. C	6.91. D
7.1. D	7.2. D	7.3. A	7.4. A	7.5. B	7.6. C	7.7. D	7.8. A	7.9. B	7.10. C
7.11. C	7.12. D	7.13. D	7.14. A	7.15. C	7.16. B	7.17. C	7.18. C	7.19. C	7.20. B

7.21. B	7.22. D	7.23. B	7.24. A	7.25. B	7.26. B	7.27. D	7.28. A	7.29. C	7.30. B
7.31. A	7.32. D	7.33. A	7.34. D	7.35. A	7.36. D	7.37. B	7.38. A	7.39. C	7.40. A
7.41. C	7.42. A	7.43. D	7.44. D	7.45. B	7.46. B	7.47. B	7.48. C	7.49. C	7.50. D
7.51. C	7.52. B	7.53. B	7.54. A	7.55. D	7.56. D	7.57. C	7.58. A	7.59. A	7.60. B
8.1. C	8.2. B	8.3. B	8.4. A	8.5. C	8.6. A	8.7. B	8.8. D	8.9. C	8.10. A
8.11. A	8.12. A	8.13. D	8.14. B	8.15. B	8.16. C	8.17. D	8.18. D	8.19. D	8.20. C
9.1. B	9.2. D	9.3. C	9.4. A	9.5. B	9.6. D	9.7. A	9.8. C	9.9. C	9.10. B
10.1. A	10.2. D	10.3. C	10.4. B	10.5. D	10.6. A	10.7. B	10.8. B	10.9. A	10.10. D
10.11. C	10.12. C	10.13. B	10.14. C	10.15. A	10.16. D	10.17. A	10.18. D	10.19. C	10.20. B